Applications linéaires : approfondissements

Cours de É. Bouchet – PCSI

5 février 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Détermination d'une application linéaire en dimension finie

1.1 Images de bases

Proposition 1.1 (Définition par l'image d'une base)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une de ses bases. Alors une application linéaire f de E dans F est définie de manière unique par la donnée de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Exercice 1. Déterminer l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $f((1,0)) = (2,1)$ et $f((0,1)) = (1,1)$.

Proposition 1.2 (Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une de ses bases. Alors :

- f est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
- f est surjective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.
- f est bijective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Exercice 2. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f((1,0,0)) = (1,0)$, $f((0,1,0)) = (1,1)$ et $f((0,0,1)) = (0,1)$. Est-elle injective, surjective ?

1.2 Espaces isomorphes

Définition 1.3 (Espaces vectoriels isomorphes)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Remarque. Si f est un isomorphisme de F dans E, alors f^{-1} est un isomorphisme de E dans F. Donc E est F sont aussi isomorphes s'il existe un isomorphisme de F dans E.

Proposition 1.4 (Isomophismes et dimension n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Proposition 1.5 (Isomophismes et dimension)

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition 1.6 (Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie, et :

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Proposition 1.7 (Lien entre injectivité, surjectivité, bijectivité et dimensions)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective }.$$

Remarque. Ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Proposition 1.8 (Cas particulier de la réciproque en dimensions finies)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans E. Alors :
- Si $f \circ g = \mathrm{id}_F$, f est bijective et $f^{-1} = g$.
- Si $g \circ f = \mathrm{id}_E$, f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple. Si s est une symétrie, la relation $s^2 = \mathrm{id}_E$ implique que s est un bijective, et que $s^{-1} = s$.

1.3 Restriction d'une application linéaire

Proposition 1.9 (Caractérisation par la restriction à deux sous-espaces supplémentaires)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Soit $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ qui coïncide avec f_1 sur E_1 et avec f_2 sur E_2 (c'est-à-dire telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$).

Remarque. On rappelle que si f est une fonction de E dans F et A une partie de E, la restriction de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application $f_{|A}$ définie sur A par $\forall x \in A$, $f_{|A}(x) = f(x)$.

Remarque. On peut donc définir une application linéaire f séparément sur E_1 et sur E_2.

2 Théorème du rang

Proposition 2.1 (Forme géométrique du théorème du rang)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E, alors la restriction de f à S (càd $f_{|S}$) est un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque. Il n'est pas nécessaire de supposer E ou F de dimension finie.

Proposition 2.2 (Théorème du rang)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, c'est-à-dire $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Remarque. Le fait que E soit de dimension finie garantit que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le seront aussi.

Exercice 3. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire u définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u((x, y, z, t)) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

3 Équations linéaires

Définition 3.1 (Équation linéaire, équation homogène associée)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **équation linéaire** toute équation d'inconnue $x \in E$ qu'on peut mettre sous la forme $f(x) = b$, où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.
L'équation $f(x) = 0_F$ est appelée **équation homogène** associée.

Remarque. Les solutions de l'équation homogène sont les vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$.

Proposition 3.2 (Forme de l'ensemble des solutions)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On note $S = \{x \in E | f(x) = b\}$. Alors :
- Soit S est vide.
- Soit il existe une solution particulière $x_P \in E$, et alors $S = \{x_P + x_H | x_H \in \text{Ker}(f)\}$.

Remarque. Autrement dit, si S est non vide, les solutions sont les vecteurs de E qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Remarque. Attention, S n'est pas nécessairement un espace vectoriel (il ne contient pas toujours 0_E).

Exemple. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on pose $E = C^1(I, \mathbb{K})$ et $F = C^0(I, \mathbb{K})$. Soit a une fonction continue sur I, on pose f l'application de E dans F définie par $f : y \mapsto y' + ay$.
C'est une application linéaire. Pour tout $b \in F$, l'équation linéaire $f(y) = b$ correspond à l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$, dont on connaissait déjà la structure des solutions.

Exemple. On pose $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose f l'application de E dans F définie par $f : X \mapsto AX$.
C'est une application linéaire. Pour tout $B \in F$, l'équation linéaire $f(X) = B$ correspond au système $AX = B$. Cela signifie que si on trouve une solution particulière d'un système linéaire, on peut ensuite se contenter de rechercher les solutions du système homogène associé pour déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des suites réelles. En se ramenant à une équation linéaire, déterminer les suites $u \in E$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

4 Formes linéaires et hyperplans

Définition 4.1 (Forme linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple. Soit C l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[0, 1]$. L'application $f \to \int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire sur C.

Définition 4.2 (Hyperplan)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Remarque. Le noyau d'une forme linéaire nulle serait E tout entier.

Remarque. Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et φ une forme linéaire sur E non nulle. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a alors : $x \in \text{Ker}(\varphi) \iff \varphi(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = 0$, où les $\varphi(e_i)$ ne sont pas tous nuls. Dans ce contexte, un hyperplan est donc un ensemble décrit par une équation linéaire non nulle sur les coordonnées x_i.

Exemple. Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites passant par l'origine (d'équation $ax + by = 0$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$), ceux de $\mathbb{R}^3$ sont les plans passant par l'origine (d'équation $ax+by+cz = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$).

Exercice 5. Soit f la forme linéaire définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P(0)$. Déterminer l'hyperplan qui correspond à son noyau et déterminer l'équation linéaire sur les coordonnées qui le caractérise.

Proposition 4.3 (Supplémentaires d'un hyperplan)

Soit E un espace vectoriel. Si H est un hyperplan de E et D une droite vectorielle non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.

Remarque. Si E est de dimension finie, on obtient $\dim(E) = \dim(H) + \dim(D)$, et donc $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Remarque. Une telle droite existera toujours, puisque H est le noyau d'une forme linéaire φ **non nulle** : il suffit de choisir $v \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$ et de poser $D = \mathrm{Vect}(v)$.