Applications linéaires : approfondissements

Exercice 1 (★). On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

1. Caractériser chacun des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ suivants par l'image d'une base (bien choisie, pour que l'expression des images soit la plus simple possible). Aucune justification n'est demandée.
   (a) la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.
   (b) la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'équation $y = x$.
   (c) la symétrie centrale.
   (d) la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses.
   (e) la symétrie axiale, d'axe la droite d'équation $y = -x$.
   (f) l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
   (g) la rotation par rapport à l'origine, d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. On pose $F_1 = \text{Vect}\,((1,0))$, $F_2 = \text{Vect}\,((0,1))$, $F_3 = \text{Vect}\,((1,1))$, $F_4 = \text{Vect}\,((-1,1))$.
   Caractériser les applications linéaires des questions (a), (b), (c), (d) et (e) par leurs restrictions sur des sous-espaces vectoriels parmi les F_i.

Résultat attendu : Ne pas hésiter à faire des dessins pour y voir plus clair...

1. (a) $f((1,0)) = (1,0)$, $f((0,1)) = (0,0)$.
   (b) $f((1,0)) = (1,0)$, $f((1,1)) = (0,0)$.
   (c) $f((1,0)) = (-1,0)$, $f((0,1)) = (0,-1)$.
   (d) $f((1,0)) = (-1,0)$, $f((0,1)) = (0,1)$.
   (e) $f((1,1)) = (-1,-1)$, $f((-1,1)) = (-1,1)$.
   (f) $f((1,0)) = (\frac{1}{2},0)$, $f((0,1)) = (0,\frac{1}{2})$.
   (g) $f((0,1)) = (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $f((1,0)) = (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.
2. (a) $f_{|F_1} = \text{id}$ et $f_{|F_2} = 0$
   (b) $f_{|F_1} = \text{id}$ et $f_{|F_3} = 0$
   (c) $f_{|F_1} = -\text{id}$ et $f_{|F_2} = -\text{id}$
   (d) $f_{|F_1} = -\text{id}$ et $f_{|F_2} = \text{id}$
   (e) $f_{|F_3} = -\text{id}$ et $f_{|F_4} = \text{id}$

Exercice 2 (★). Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P(X)) = (P(-1), P(0), P(1)).$$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
Résultat attendu : On montre la linéarité, puis la bijectivité (plusieurs méthodes possibles).

Exercice 3 (★). Soit u la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad u((x,y,z)) = (x+z, y-2x, x+3z).$$

Montrer que u est un automorphisme.
Résultat attendu : On montre la linéarité, puis la bijectivité (plusieurs méthodes possibles).

Exercice 4 (★).

1. Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?
2. Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?
3. Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

Résultat attendu : On utilise le théorème du rang.

1. 2
2. 26
3. Non

Exercice 5 (★). Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-3y, -x+y+2z, y-z) \end{array}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. En déduire le rang de φ.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Résultat attendu :

1. On montre que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est $((3,1,1))$.
3. Par théorème du rang, $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$.
4. Une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est $((1,-1,0),(0,2,-1))$ (d'autres seraient possibles).

Exercice 6 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + P(0) \end{array}$. Montrer que φ est bien définie et linéaire, puis qu'il s'agit d'un automorphisme.
Résultat attendu : Pour la bonne définition de φ, il faut montrer que l'image d'un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ est également dans $\mathbb{R}_n[X]$. La linéarité se montre en revenant à la définition. On montre ensuite que φ est bijective par une méthode au choix.

Exercice 7 (★★). Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P(X)) = P(X) + (1-X)P'(X).$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
Résultat attendu : Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $((1-p)X^p + pX^{p-1})_{p \in [\![1,n]\!]}$, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $(1-X)$.

Exercice 8 (★★). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et a un vecteur non nul de E. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre. Dans la suite, on pose $G_a = \mathrm{Vect}(a, f(a))$.
3. Montrer que G_a est stable par f (c-à-d que $\forall x \in G_a, f(x) \in G_a$).
4. Montrer que si un sous-espace vectoriel F stable par f contient a, alors $G_a \subset F$.
5. Si $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'endomorphisme f qui vérifie l'hypothèse de l'énoncé.

Résultat attendu : Les quatre premières questions se traitent de manière classique (éventuellement en revenant aux définitions des objets mathématiques impliqués). Un exemple d'endomorphisme qui convient est :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-y,x) \end{array}.$$

Exercice 9 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u, v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient $u \circ v = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$. En déduire que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.
Résultat attendu : On montre l'inclusion en revenant à la définition, puis on utilise le théorème du rang.

Exercice 10 (★★★). Soit f l'application définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est une application linéaire définie de E dans E.
2. Pour $k \leqslant n$, calculer $f(X^k)$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ et le rang de f.
3. Soit Q un polynôme de $\mathrm{Im}(f)$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de E tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Résultat attendu :

1. On montre que f est linéaire et que l'image d'un élément de E est bien dans E.
2. On trouve après simplifications $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1, X)$ et $\mathrm{rg}(f) = n-1$.
3. On raisonne par analyse-synthèse, ou en conjecturant un résultat qui convient à l'aide des bases obtenues en question précédente.

Exercice 11 (★). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = 2$ et $P(-1) = 3$.
Résultat attendu : En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les polynômes solutions sont ceux du type $P(X) = (X-1)(X+1)Q(X) - \frac{1}{2}X + \frac{5}{2}$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 12 (★). Déterminer toutes les suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n - 8$.
Résultat attendu : En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les suites solutions sont celles qui s'écrivent sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(1+\sqrt{2})^n + \mu(1-\sqrt{2})^n + 4$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice 13 (★★). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) = X.P'(X) + 1$.
Résultat attendu : En se ramenant à une résolution d'équation linéaire, on montre que les polynômes solutions sont ceux du type $P(X) = \lambda(X-1) + 1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 (★★). Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par $f(P(X)) = \int_0^1 P(t)dt$.

1. Vérifier que f est une forme linéaire, et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition d'une forme linéaire, puis on montre que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
2. Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $(X^p - \frac{1}{p+1})_{p \in [\![1,n]\!]}$.

Exercice 15 (Type DS)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & (n+1)P(X) - XP'(X) \end{array}$.

1. Montrer que φ est bien définie.
   Indication : introduire un polynôme dont on explicitera les coefficients.
2. Montrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. Déterminer le rang de φ. En déduire que φ est surjective.
5. Résoudre l'équation $(n+1)P(X) = XP'(X) + X$, d'inconnue $P(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Résultat attendu :

1. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, alors :
$$\varphi(P(X)) = (n+1)\sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - X\sum_{k=1}^{n+1} a_k k X^{k-1} = (n+1)a_0 + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k X^k + 0X^{n+1}.$$
   Le terme en X^{n+1} se simplifie, donc $\varphi(P(X)) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc φ est bien définie.
2. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_{n+1}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \varphi((\lambda P + Q)(X)) &= (n+1)(\lambda P + Q)(X) - X(\lambda P + Q)'(X) \\ &= (n+1)(\lambda P(X) + Q(X)) - X(\lambda P'(X) + Q'(X)) \\ &= \lambda((n+1)P(X) - XP'(X)) + ((n+1)Q(X) - XQ'(X)) \\ \varphi((\lambda P + Q)(X)) &= \lambda\varphi(P(X)) + \varphi(Q(X)) \end{aligned}$$
   Donc φ est bien une application linéaire.
3. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$,
$$\begin{aligned} P(X) \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P(X)) = 0 \\ &\iff (n+1)a_0 + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k X^k = 0 \quad \text{d'après la question 1} \\ &\iff \begin{cases} (n+1)a_0 = 0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], \quad (n+1-k)a_k = 0 \end{cases} \quad \text{en identifiant les coefficients} \\ &\iff \forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = 0 \\ &\iff P(X) = a_{n+1}X^{n+1} \\ &\iff P(X) \in \mathrm{Vect}(X^{n+1}) \end{aligned}$$
   Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^{n+1})$. Or $X^{n+1} \neq 0$, donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = (n+2) - 1 = n+1$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Or $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_n[X]$.
   On en déduit que φ est surjective.
5. Soit $P(X) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, $(n+1)P(X) = XP'(X) + X \iff \varphi(P(X)) = X$. Sous cette forme, on reconnaît une équation linéaire.
   Comme on connaît déjà $\mathrm{Ker}(\varphi)$, il suffit de déterminer une solution particulière (en cherchant par exemple un polynôme du type $aX + b$) pour déterminer l'ensemble des solutions.
   Soit $Q(X) = \frac{1}{n}X$. Alors $\varphi(Q(X)) = (n+1)\frac{1}{n}X - X\frac{1}{n} = \frac{n}{n}X = X$, donc Q est solution particulière de l'équation.
   L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{\frac{1}{n}X + \lambda X^{n+1} | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.