Applications linéaires : introduction

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 mars 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 (Application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** de E dans F si elle vérifie : $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Proposition 1.2 (Valeur en 0)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration. La linéarité de f donne $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$. En retranchant $f(0_E)$ aux deux membres de cette égalité, on obtient que $f(0_E) = 0_F$. $\square$

Proposition 1.3 (Caractérisation d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. La fonction f est une application linéaire de E dans F si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Démonstration.

— Supposons que f est une application linéaire, $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y) = \lambda f(x) + f(y)$. D'où le résultat.

— Supposons la condition vérifiée. Soit $(x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(1x+y) = 1f(x) + f(y) = f(x) + f(y)$. On en déduit en particulier que $f(0_E) = 0_F$. De plus, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = f(\lambda x + 0_E) = \lambda f(x) + 0_F = \lambda f(x)$. D'où le résultat.

$\square$

Exercice 1. Montrer que l'application $P \mapsto P'$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
<u>Solution :</u> Soit P et Q deux polynômes, et λ un réel, $(\lambda P + Q)'(X) = \lambda P'(X) + Q'(X)$. Donc l'application étudiée est linéaire.

Exercice 2. Déterminer si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f((x,y)) = x + y + 1$.
2. La fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $g((x,y)) = x + y$.
3. La fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $h((x,y)) = x \times y$.

<u>Solution :</u>

1. $f((0,0)) = 1 \neq 0$, donc f n'est pas une application linéaire.
2. Soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et λ un réel.
$$g\left(\lambda(x,y) + (x',y')\right) = g\left((\lambda x + x', \lambda y + y')\right) = \lambda x + x' + \lambda y + y' = \lambda g((x,y)) + g\left((x',y')\right).$$
Donc g est une application linéaire.
3. $h((0,1) + (1,0)) = h((1,1)) = 1 \neq 0 + 0 = h((0,1)) + h((1,0))$. Donc h n'est pas une application linéaire.

Exercice 3. Montrer que l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par $f(M) = M^\top$ est une application linéaire.
<u>Solution :</u> Soit M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ un complexe. On a :
$$f(\lambda M + N) = (\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top = \lambda f(M) + f(N).$$
Donc f est bien une application linéaire.

1.2 Opérations usuelles

Proposition 1.4 (Espace vectoriel des applications linéaires)

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de F^E.

— L'application nulle est linéaire, donc dans $\mathcal{L}(E, F)$.

— Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x, y) \in E^2$, et $\mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y)\\ &= \lambda\mu f(x) + \lambda f(y) + \mu g(x) + g(y)\\ &= \mu(\lambda f(x) + g(x)) + \lambda f(y) + g(y)\\ &= \mu(\lambda f + g)(x) + (\lambda f + g)(y)\end{aligned}$$

Donc $(\lambda f + g) \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par combinaison linéaire.

Donc c'est un sous-espace vectoriel de F^E. Donc c'est un espace vectoriel. □

Proposition 1.5 (Composée de deux applications linéaires)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, et g est une application linéaire de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Démonstration. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $g \circ f(\lambda x + y) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y)$. Donc $g \circ f$ est une application linéaire. □

Proposition 1.6 (Distributivité de la composition)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f et g sont des applications de E dans F, et h est une application linéaire de F dans G, alors $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.

Démonstration. $\forall x \in E$, $h \circ (f + g)(x) = h(f(x) + g(x)) = h \circ f(x) + h \circ g(x)$. D'où le résultat. □

Remarque. On savait déjà que si f est une application de E dans F, et g et h sont des applications de F dans G, alors $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$, sans condition de linéarité.

1.3 Isomorphismes

Définition 1.7 (Isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est un **isomorphisme** de E dans F lorsqu'elle est bijective de E dans F.

Exemple. L'application identité de E, notée id_E et définie par $x \mapsto x$ est un isomorphisme de E.

Proposition 1.8 (Réciproque d'un isomorphisme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f un isomorphisme de E dans F. Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration. On sait déjà (depuis le chapitre Applications) que f^{-1} est bijective de F dans E. Montrons que c'est une application linéaire. Soit $(y, z) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la linéarité de f donne :

$$f^{-1}(\lambda y + z) = f^{-1}\left(\lambda f(f^{-1}(y)) + f(f^{-1}(z))\right) = f^{-1}\left(f(\lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(z))\right) = \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(z).$$

Donc f^{-1} est bien un isomorphisme de F dans E. □

Proposition 1.9 (Composée d'isomorphismes)

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E dans F, et g est un isomorphisme de F dans G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Découle directement des résultats déjà connus sur la composée de deux applications linéaires et la composée de deux bijections. □

2 Noyau, image et rang

2.1 Noyau et image

Proposition 2.1 (Image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et H un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque. On rappelle que $f(H) = \{f(x) | x \in H\}$.

Démonstration. H est un sous-espace vectoriel de E, donc $0_E \in H$. De plus, $f(0_E) = 0_F$ puisque f est une application linéaire. Donc $0_F \in f(H)$.
Soit $(x, y) \in f(H)^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors il existe a et b dans H tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Comme H est un espace vectoriel, $\lambda a + b \in H$. De plus,

$$f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) = \lambda x + y.$$

Donc $\lambda x + y \in f(H)$, donc $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Proposition 2.2 (Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et G un sous-espace vectoriel de F. Alors $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque. On rappelle que $f^{-1}(G) = \{x \in E | f(x) \in G\}$.

Démonstration. G est un sous-espace vectoriel de F, donc $0_F \in G$. De plus, $f(0_E) = 0_F$ puisque f est une application linéaire, donc $0_E \in f^{-1}(G)$.
Soit $(x, y) \in (f^{-1}(G))^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Puisque G est un espace vectoriel, la linéarité de f donne :

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \in G.$$

Donc $\lambda x + y \in f^{-1}(G)$. Donc $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Définition 2.3 (Image d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle **image** de f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'image directe de E par f.

Remarque. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F | \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

De plus, d'après les résultats précédents, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 4. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x, y)) = x + y$. Déterminer son image.
<u>Solution :</u> Il est immédiat que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$, $x = g((x, 0)) \in \mathrm{Im}(g)$. On a donc montré par double inclusion que $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$.

Proposition 2.4 (Image et surjectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration. Immédiat, puisqu'une application de E dans F est surjective si et seulement si $f(E) = F$. □

Remarque. On peut également noter que $\mathrm{Im}(f) = \{0_F\}$ si et seulement si f est l'application nulle.

Définition 2.5 (Noyau d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f.

Remarque. On a donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E | f(x) = 0_F\}.$$

De plus, d'après les résultats précédents, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 5. Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $g((x, y)) = x + y$. Déterminer son noyau.
<u>Solution :</u> Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathrm{Ker}(g) \iff g((x, y)) = 0 \iff x + y = 0 \iff (x, y) = x(1, -1) \iff (x, y) \in \mathrm{Vect}((1, -1)).$$

On a donc $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}((1, -1)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$.

Proposition 2.6 (Noyau et injectivité)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F. La fonction f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration.

- Supposons que f est injective. Alors 0_F a au plus un antécédent par f, donc $\mathrm{Ker}(f)$ a au plus un élément. Or $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$ puisque f est linéaire. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $(x, y) \in E^2$, supposons que $f(x) = f(y)$. Alors par linéarité, $f(x - y) = 0_F$, et $x - y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $x - y = 0_E$ et $x = y$. Donc f est injective.

□

Remarque. On peut également noter que $\mathrm{Ker}(f) = E$ si et seulement si f est l'application nulle.

Exercice 6. On considère l'application linéaire $f : P \mapsto P'$ définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver son noyau et son image. Est-elle injective ? surjective ?
<u>Solution :</u>

- On commence par chercher le noyau. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$,

  $$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P' = 0 \iff \deg(P) \leqslant 0 \iff P \in \mathbb{R}_0[X].$$

  Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, l'application f n'est pas injective.
- Cherchons l'image. Il est direct que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, soit $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} X^{k+1}$, alors $f(P) = Q$, et $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$, et l'application f est surjective.

Proposition 2.7 (Famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une de ses familles génératrices. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Démonstration. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n)) \subset \mathrm{Im}(f)$.
Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice de E, donc il existe $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On a donc, par linéarité de f :

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \in \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n)).$$

Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$, par double inclusion. □

Remarque. C'est en particulier vrai lorsque $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

Exercice 7. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y)$. Montrer que c'est une application linéaire et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
Solution : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(\lambda(x,y)+(a,b)) &= f((\lambda x + a, \lambda y + b)) \\
&= (4(\lambda x + a) - 6(\lambda y + b), 2(\lambda x + a) - 3(\lambda y + b)) \\
&= (\lambda(4x-6y) + 4a - 6b, \lambda(2x-3y) + 2a - 3b) \\
&= \lambda(4x-6y, 2x-3y) + (4a-6b, 2a-3b) \\
&= \lambda f((x,y)) + f((a,b))
\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire. De plus, $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f((1,0)), f((0,1))\right) = \mathrm{Vect}\left((4,2),(-6,-3)\right) = \mathrm{Vect}\left((4,2)\right),$$

où la dernière égalité provient de la relation $(-6,-3) = -\frac{3}{2}(4,2)$.

2.2 Rang

Définition 2.8 (Rang d'une application linéaire)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On dit que f est **de rang fini** quand $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle **rang** de f, et on note $\mathrm{rg}(f)$ la valeur :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = \dim(f(E)).$$

Remarque. La fonction nulle est la seule application de rang 0.

Remarque. $\mathrm{Im}(f) \subset F$ donc si F est de dimension finie, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$. On en déduit $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.

Remarque. Si E est un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base $(e_1,\dots,e_n)$. On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$ donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(e_1),\dots,f(e_n)) \leqslant n$, et en particulier $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$.

Exercice 8. Soit f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (4x-6y, 2x-3y)$. Déterminer son rang.
Solution : On a montré dans l'exercice 7 que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((4,2)\right)$, donc $((4,2))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or $(4,2) \neq (0,0)$ donc c'est aussi une famille libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, ce qui donne $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Proposition 2.9 (Rang de la composée)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)).$$

Démonstration. Par définition, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim\big((v \circ u)(E)\big) = \dim\big(v(u(E))\big)$.
— $u(E) \subset F$, donc $v(u(E)) \subset v(F)$. Donc $\dim\big(v(u(E))\big) \leqslant \dim(v(F))$, ce qui donne $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$.

— $u(E)$ est de dimension finie, notons $(f_1, \ldots, f_n)$ une de ses bases (le cas où $u(E) = \{0_F\}$ est immédiat). Alors $\dim\big(v(u(E))\big) = \dim(\mathrm{Vect}(v(f_1), \ldots, v(f_n))) = \mathrm{rg}(v(f_1), \ldots, v(f_n)) \leqslant n = \dim(u(E))$. On en déduit $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.

□

Proposition 2.10 (Petit lemme)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire injective de E dans F. Alors l'image par f d'une famille libre de E est une famille libre de F.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E, montrons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F.$$

On a alors, par linéarité de f, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F$, càd $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme f est injective, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, ce qui nous donne $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$. Et comme $(e_1, \ldots e_n)$ est une famille libre de E, les λ_i sont tous nuls. Donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre dans F. □

Proposition 2.11 (Invariance du rang par composition par un isomorphisme)

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

— Si u est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.

— Si v est un isomorphisme, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.

Démonstration.

— Si u est un isomorphisme, alors en particulier u est surjective, donc $u(E) = F$. Donc :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim\big(v(u(E))\big) = \dim(v(F)) = \mathrm{rg}(v).$$

— Si v est un isomorphisme, alors en particulier v est injective. Comme $u(E)$ est de dimension finie, notons $(f_1, \ldots, f_n)$ une de ses bases (le cas où $u(E) = \{0_F\}$ est immédiat). Alors (d'après le petit lemme) $(v(f_1), \ldots, v(f_n))$ est une famille libre de G. On déduit de tout cela :

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim\big(v(u(E))\big) = \dim(\mathrm{Vect}(v(f_1), \ldots, v(f_n))) = n = \dim(u(E)) = \mathrm{rg}(u).$$

□

3 Endomorphismes

3.1 Définitions et opérations usuelles

Définition 3.1 (Endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel. On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E.

Définition 3.2 (Homothétie)

Soit E un espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **homothétie** de rapport λ l'endomorphisme h de E défini par $\forall x \in E$, $h(x) = \lambda x$.

Remarque. On a alors $h = \lambda\, \mathrm{id}_E$, où id_E est l'application identité de E.

Proposition 3.3 (Espace vectoriel des endomorphismes)

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, c'est donc un cas particulier d'un résultat déjà rencontré. $\square$

Définition 3.4 (Puissances d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f^p \circ f = f \circ f^p$.

Remarque. On a ainsi $f^0 = \mathrm{id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f \ldots$

Remarque. Attention : la notation puissance se réfère habituellement à des produits, mais ici, il s'agit bien de compositions, pas de produits !

Exemple. L'application $f : P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. On peut donc définir ses puissances : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(P(X)) = P^{(n)}(X)$.

Proposition 3.5 (Formule du binôme de Newton)

Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Démonstration. Cette formule se montre par récurrence, de la même façon que la formule du binôme de Newton pour les matrices. Il suffit juste d'y remplacer les produits de matrices par des compositions d'endomorphismes. $\square$

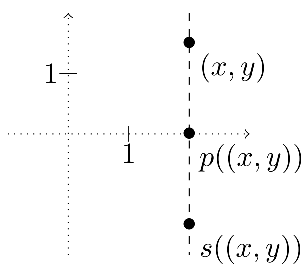
3.2 Projecteurs et symétries

Dans toute cette partie, on notera E un espace vectoriel, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour tout vecteur $x \in E$, on note (x_1, x_2) l'unique couple de $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

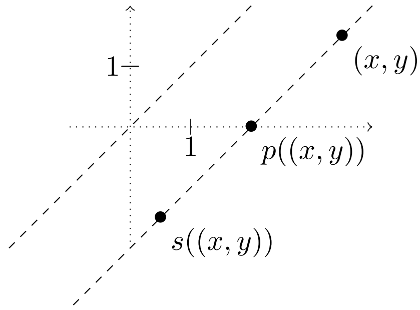
Définition 3.6 (Projecteur, symétrie)

On appelle **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 l'application p définie par $\forall x \in E$, $p(x) = x_1$.
On appelle **symétrie** par rapport à F_1 parallèlement à F_2 l'application s définie par $\forall x \in E$, $s(x) = x_1 - x_2$.

Exemple. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right) \oplus \mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$, avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = (x,0) + (0,y)$.
- $p : (x,y) \mapsto (x,0)$ est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$.
- $s : (x,y) \mapsto (x,-y)$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$.



Exemple. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right) \oplus \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$, avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = (x-y,0) + (y,y)$.
- $(x,y) \mapsto (x-y,0)$ est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$.
- $(x,y) \mapsto (x-2y,-y)$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$.



Remarque. p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 quand $p|_{F_1} = \mathrm{id}_E$ et $p|_{F_2} = 0$.
s est la symétrie par rapport à F_1, parallèlement à F_2 quand $s|_{F_1} = \mathrm{id}_E$ et $s|_{F_2} = -\mathrm{id}_E$.

Proposition 3.7 (Linéarité des projecteurs et symétries)

Les projecteurs et les symétries définis sur E sont des endomorphismes de E.

Démonstration. On suppose que $E = F_1 \oplus F_2$. Soit p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 et s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. Comme p et s sont à valeurs dans E, il suffit de montrer que ce sont des applications linéaires.
Soit $(x, y) \in E^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ et $\exists (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$.
Alors, $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$, avec $\lambda x_1 + y_1 \in F_1$, $\lambda x_2 + y_2 \in F_2$.
Cela donne $p(\lambda x + y) = \lambda x_1 + y_1 = \lambda p(x) + p(y)$, donc p est linéaire.
De même, $s(\lambda x + y) = (\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) = \lambda(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = \lambda s(x) + s(y)$, donc s est linéaire. □

Proposition 3.8 (Caractéristiques d'un projecteur)

Soit p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2. Alors $F_1 = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}(p)$.

Démonstration. Soit $x \in E$, alors $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \iff p(x) - x = 0_E \iff x_1 - x_1 + x_2 = 0_E \iff x_2 = 0_E \iff x \in F_1,$$

$$x \in \mathrm{Ker}(p) \iff p(x) = 0_E \iff x_1 = 0_E \iff x \in F_2.$$

Enfin, on montre $F_1 = \mathrm{Im}(p)$ par double inclusion. Soit $x \in F_1$, alors $x = x + 0_E$, où $(x, 0_E) \in F_1 \times F_2$. Donc $p(x) = x$. On en déduit que $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $F_1 \subset \mathrm{Im}(p)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $z \in E$ tel que $x = p(z)$. Or $\exists (z_1, z_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $z = z_1 + z_2$. Alors $x = z_1 \in F_1$ et $\mathrm{Im}(p) \subset F_1$. D'où le résultat. □

Proposition 3.9 (Caractéristiques d'une symétrie)

Soit s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2. Alors $F_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $F_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration. Soit $x \in E$, alors $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \iff s(x) - x = 0_E \iff x_1 - x_2 + x_1 - x_2 = 0_E \iff x_2 = 0_E \iff x \in F_1,$$

$$x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) \iff s(x) + x = 0_E \iff x_1 - x_2 + x_1 + x_2 = 0_E \iff x_1 = 0_E \iff x \in F_2.$$

□

Proposition 3.10 (Caractérisation des projecteurs)

Soit f un endomorphisme de E. La fonction f est un projecteur si et seulement si $f \circ f = f$.

Démonstration.

— Supposons que f est un projecteur (sur F_1 parallèlement à F_2, avec $E = F_1 \oplus F_2$). Soit $x \in E$, alors $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Donc $f(x) = x_1$, et comme $x_1 = x_1 + 0_E$ avec $x_1 \in F_1$ et $0_E \in F_2$ cela donne :

$$f \circ f(x) = f(x_1) = x_1 = f(x).$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien $f \circ f = f$.

— Réciproquement, supposons que $f \circ f = f$. Montrons que f est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. Pour cela, il faut commencer par montrer que ces deux espaces vectoriels sont bien supplémentaires : soit $x \in E$, on va montrer qu'il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(f) \times \mathrm{Ker}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$.

— Analyse : supposons qu'un tel couple existe. Comme $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x_1$, et donc $x = f(y) + x_2$. En appliquant f de nouveau, on trouve par linéarité :

$$f(x) = f \circ f(y) + f(x_2) = f \circ f(y) = f(y) = x_1.$$

Donc nécessairement, $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x - f(x)$.

— Synthèse : soit $x \in E$. On pose $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x - f(x)$. Il est immédiat que $x_1 \in \mathrm{Im}(f)$, par ailleurs :

$$f(x_2) = f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0_E,$$

donc $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme de plus $x = f(x) + (x - f(x)) = x_1 + x_2$, cette décomposition convient bien.

Donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E. De plus, pour $x \in E$, la décomposition associée est $x = f(x) + (x - f(x))$, avec $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme f associe à tout $x \in E$ la valeur $f(x)$, c'est bien le projecteur de E sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

$\square$

Exercice 9. Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (4x - 6y, 2x - 3y)$. Montrer que f est un projecteur, en précisant ses caractéristiques.

Solution : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f \circ f((x, y)) = f((4x - 6y, 2x - 3y)) = (16x - 24y - 12x + 18y, 8x - 12y - 6x + 9y) = (4x - 6y, 2x - 3y) = f((x, y)).$$

Donc $f \circ f = f$, et f est un projecteur. On va maintenant chercher son noyau et son image :

— Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f((x, y)) = (0, 0) \\ &\iff (4x - 6y, 2x - 3y) = (0, 0) \\ &\iff 2x - 3y = 0 \\ &\iff (x, y) = \frac{x}{3}(3, 2) \\ &\iff (x, y) \in \mathrm{Vect}((3, 2)), \end{aligned}$$

Ce qui nous donne par double inclusion $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((3, 2))$.

— On a montré dans l'exercice 7 que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f((1, 0)), f((0, 1))\right) = \mathrm{Vect}((4, 2), (-6, -3)) = \mathrm{Vect}((4, 2))$.

Donc f est le projecteur sur $\mathrm{Vect}((4, 2))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((3, 2))$.

Rmq : pour l'image, comme il s'agit d'un projecteur, on pouvait aussi chercher $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

Proposition 3.11 (Caractérisation des symétries)

Soit f un endomorphisme de E. La fonction f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Démonstration.

— Supposons que f est une symétrie (par rapport à F_1 parallèlement à F_2, avec $E = F_1 \oplus F_2$). Soit $x \in E$, $\exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $f(x) = x_1 - x_2$, et comme $x_1 \in F_1$ et $-x_2 \in F_2$ cela donne :

$$f \circ f(x) = f(x_1 - x_2) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = x.$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

— Réciproquement, supposons que $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrons que f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$. Pour cela, il faut commencer par montrer que ces deux espaces vectoriels sont bien supplémentaires. On procède comme dans le cas de la caractérisation des projecteurs, cette fois-ci avec la décomposition :

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + f(x))}_{\in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - f(x))}_{\in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)}.$$

Soit $x \in E$, comme $f(x) = \frac{1}{2}(x + f(x)) - \frac{1}{2}(x - f(x))$, on a bien montré que f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$.

□

3.3 Automorphismes

Définition 3.12 (Automorphisme, groupe linéaire de E)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On dit que f est un **automorphisme** de E lorsqu'elle est bijective de E dans E.
On appelle **groupe linéaire** de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Remarque. Pour être un automorphisme, il faut donc être à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Exemple. Les symétries sont des automorphismes, les homothéties de rapport non nul aussi.

Proposition 3.13 (Propriétés des automorphismes)

Soit E un espace vectoriel. Alors :
- $\forall (u, v) \in GL(E)^2$, $u \circ v \in GL(E)$.
- $\forall u \in GL(E)$, $u \circ \mathrm{id}_E = u = \mathrm{id}_E \circ u$.
- $\forall u \in GL(E)$, $u^{-1} \in GL(E)$.

Démonstration. Découle directement des propriétés des isomorphismes, des endomorphismes et des compositions.

□

Remarque. Soit $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$. On peut définir u^k par : $u^k = \begin{cases} \mathrm{id}_E \text{ si } k = 0 \\ \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ fois}} \text{ si } k > 0 \\ \underbrace{u^{-1} \circ \ldots \circ u^{-1}}_{-k \text{ fois}} \text{ si } k < 0 \end{cases}$