Intégration

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 février 2025

Table des matières

1 Intégrale d'une fonction **2**
- 1.1 Cas d'une fonction en escalier 2
- 1.2 Cas d'une fonction continue sur un segment 2

2 Propriétés des intégrales de fonctions continues **3**
- 2.1 Premières propriétés 3
- 2.2 Intégrales et relation d'ordre 4
- 2.3 Passage à la limite et développement asymptotique 5

3 Sommes de Riemann **5**

4 Lien entre intégrale et primitive **6**

5 Inégalité de Taylor-Lagrange **7**
- 5.1 Formule de Taylor avec reste intégral 7
- 5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange 7

6 Extension au cas des fonctions complexes **8**

1 Intégrale d'une fonction

1.1 Cas d'une fonction en escalier

Définition 1.1 (Subdivision)

Soit a et b deux réels avec $a < b$. Une **subdivision** de $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b.$$

Définition 1.2 (Pas d'une subdivision)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ est une **subdivision à pas constant** lorsqu'il existe $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k - a_{k-1} = h$.
La valeur de h est appelée **pas de la subdivision**.

Exemple. $(0, 2, 6)$ est une subdivision de $[0, 6]$ (à pas non constant).
$(0, 2, 4, 6)$ est une subdivision de $[0, 6]$ à pas constant, de pas 2.

Définition 1.3 (Fonction en escalier)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que φ est une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que φ est constante sur chaque intervalle $]a_{k-1}, a_k[$.

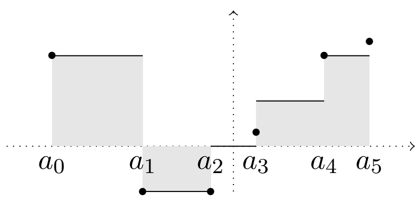
Remarque. Autrement dit, φ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a_{k-1}, a_k[$, $\varphi(x) = \lambda_k$.

Exemple. La fonction partie entière est une fonction en escalier sur n'importe quel intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Définition 1.4 (Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. En reprenant les notations de la remarque précédente, on définit **l'intégrale sur** $[a, b]$ de φ par : $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - a_{k-1})$.

Remarque. Dans cette formule, la quantité $\lambda_k(a_k - a_{k-1})$ est l'aire d'un rectangle élémentaire de hauteur λ_k. Cette aire est comptée positivement si $\lambda_k \geqslant 0$, et négativement sinon. Donc $\int_a^b \varphi(t)dt$ correspond à l'aire algébrique de la région délimitée par le graphe de φ et l'axe des abscisses.



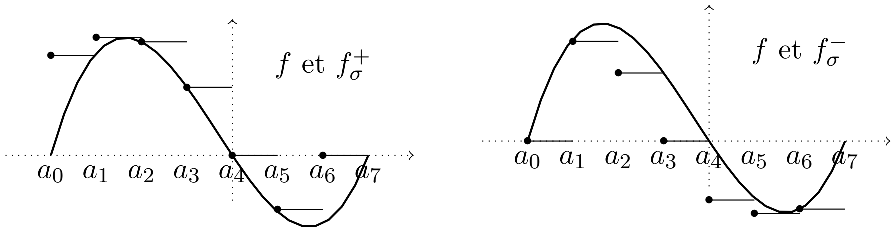
1.2 Cas d'une fonction continue sur un segment

Définition 1.5 (Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier)

Soit a et b deux réels avec $a < b$, f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On note f_σ^+ et f_σ^- les deux fonctions en escalier définies par : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in [a_{k-1}, a_k[$,

$$f_\sigma^+(x) = \max_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t) \quad \text{et} \quad f_\sigma^-(x) = \min_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t).$$

Remarque. Représentation graphique :



Remarque. D'après le théorème des bornes atteintes, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, les nombres $\max\limits_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t)$ et $\min\limits_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t)$ sont bien définis.

Définition 1.6 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$. En réutilisant les notations de la définition précédente, on a :

$$\inf_{\sigma\in\mathcal{S}} \left(\int_a^b f_\sigma^+(t)dt \right) = \sup_{\sigma\in\mathcal{S}} \left(\int_a^b f_\sigma^-(t)dt \right).$$

Cette valeur commune est appelée **intégrale de a à b de f**, et est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Remarque. Dans le cas d'une fonction en escalier, cette définition coïncide avec celle donnée précédemment. Cela donne par exemple que si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda dt = (b - a)\lambda$.

Remarque. Cette définition permet de conserver la notion d'intégrale définie comme aire sous la courbe.

Définition 1.7 (Intégrale aux bornes interverties)

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. On définit :

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque. Dans ce cas, l'aire est alors comptée négativement.

Définition 1.8 (Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. On définit la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ par la valeur $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

Remarque. Cette notion généralise celle de moyenne sur un nombre fini de réels.

2 Propriétés des intégrales de fonctions continues

2.1 Premières propriétés

Proposition 2.1 (Linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $(a, b) \in I^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Proposition 2.2 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $(a,b,c) \in I^3$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$.

Remarque. La formule est vraie sans contrainte d'ordre entre a, b et c.

Proposition 2.3 (Généralisation de la relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a_0, a_1, … a_n une suite finie de réels de I. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt \right) = \int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$$

2.2 Intégrales et relation d'ordre

Proposition 2.4 (Positivité)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$. Si f est positive sur $[a,b]$ alors $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Proposition 2.5 (Croissance de l'intégration)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$. Si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Exercice 1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$.

Proposition 2.6 (Stricte positivité)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$. Si f est non nulle, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.

Remarque. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $(f,g) \in (C^0([a,b]))^2$. On suppose que $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ et que $\exists x \in [a,b]$ tel que $f(x) < g(x)$. Le résultat précédent appliqué à $g - f$ donne alors un résultat de croissance stricte : $\int_a^b f < \int_a^b g$.

Proposition 2.7 (Cas de l'intégrale nulle)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a,b], f(t) = 0.$$

Proposition 2.8 (Inégalité triangulaire pour les intégrales)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $(a,b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$. Alors $\displaystyle\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$.

2.3 Passage à la limite et développement asymptotique

Il est interdit de passer une limite de l'extérieur à l'intérieur d'une intégrale : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, on peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt \neq \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$, même si on sait déjà que ces limites existent.
Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt$, il faut procéder par calcul direct de l'intégrale ou par encadrement (si le calcul direct est impossible).

Exercice 2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(0)=0$, $f_n(t)=n$ si $t\in]0,\frac{1}{n}]$ et $f_n(t)=0$ si $t>\frac{1}{n}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Que peut-on en déduire concernant $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$?
2. Soit $t\in[0,1]$. Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$ avant de la calculer. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.

De même, on ne peut pas prendre directement l'équivalent d'une intégrale. Pour obtenir un développement asymptotique d'une expression impliquant une intégrale, on passe le plus souvent par des encadrements.

Exercice 3. Montrer que $\int_x^{x+1} e^t\ln(t)dt \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x(e-1)\ln(x)$.

3 Sommes de Riemann

Définition 3.1 (Sommes de Riemann)

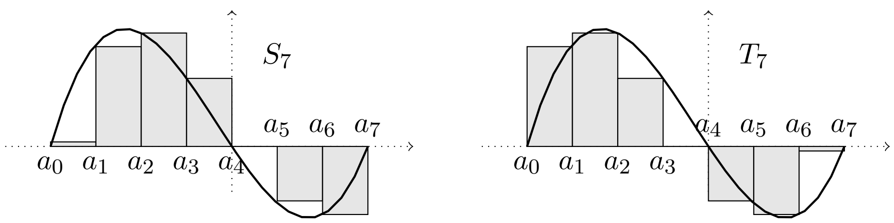
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. On définit les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\quad \text{et}\quad T_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k),$$

où $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $a_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$. Ces suites sont appelées **sommes de Riemann** associées à la fonction f.

Remarque. En particulier, on trouve $a_0=a$ et $a_n=b$.

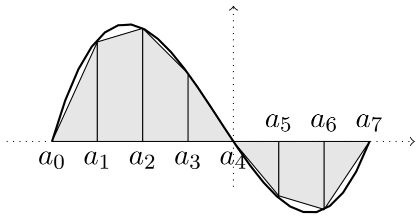
Remarque. C'est une méthode d'approximation de la valeur de l'intégrale, appelée méthode des rectangles.



Proposition 3.2 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\leqslant b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. Les sommes de Riemann (S_n) et (T_n) convergent vers $I=\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Remarque. Dans le cas où f est M-lipschitzienne sur $[a,b]$, on a montré au passage une majoration de l'erreur commise par $\frac{M(b-a)^2}{2n}$.
Cette majoration n'est pas très bonne, puisque $\frac{1}{n}$ converge lentement par 0. La méthode des trapèzes, qui consiste à adapter la méthode des rectangles en utilisant des trapèzes à la place des rectangles (l'approximation locale est affine au lieu de constante) permettrait une erreur en $O(\frac{1}{n^2})$, ce qui est bien mieux.



Remarque. Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors on a en particulier :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Exercice 4. Étudier la convergence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$.

4 Lien entre intégrale et primitive

Proposition 4.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$, on définit la fonction F par : $\forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Alors F est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque. Comme f est continue, on obtient de plus que F est de classe C^1 sur I.

Remarque. On en déduit comme au premier semestre que toute fonction continue sur I admet des primitives, que si F est une primitive de f, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ et les formules d'intégration par parties et de changement de variables.

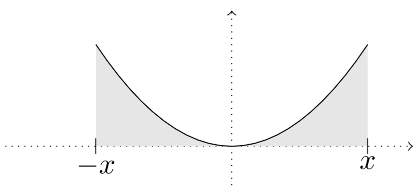
Exercice 5. Étudier la dérivabilité de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}dt$.

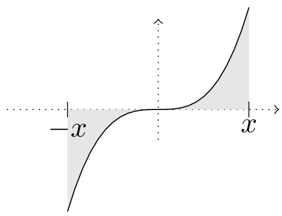
Proposition 4.2 (Cas des fonctions paires, impaires ou périodiques)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- Si f est impaire, alors $\forall x \in I$, $\int_{-x}^{x} f = 0$.
- Si f est paire, alors $\forall x \in I$, $\int_{-x}^{x} f = 2\int_0^x f$.
- Si f est périodique de période $T > 0$, alors $\forall x \in I$, $\int_x^{x+T} f = \int_0^T f$.

Remarque. Représentations graphiques pour le cas des fonctions paires et impaires :





5 Inégalité de Taylor-Lagrange

5.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 5.1 (Formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre n))

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur l'intervalle I. Pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Remarque. Cette formule n'est pas exigible en première année, mais on en a besoin pour démontrer la suivante, qui elle le sera.

Remarque. Si P est une fonction polynôme de degré n définie sur $\mathbb{R}$ alors P est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)} = 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

et on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes.

Remarque. La formule de Taylor avec reste intégral présente de fortes similitudes de forme avec la formule de Taylor-Young, vue dans le chapitre sur les développements limités. Ces deux formules ont cependant des natures très différentes :

— La formule de Taylor-Young donne une approximation locale, au voisinage d'un point.

— La formule de Taylor avec reste intégral est une relation globale, qu'on peut appliquer entre deux points a et b potentiellement éloignés.

5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 5.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe m et M deux réels tels que $\forall t \in I$, $m \leqslant f^{(n+1)}(t) \leqslant M$. Alors $\forall (a, b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$,

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} m \leqslant f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Remarque. Attention : contrairement à la formule de Taylor avec reste intégral, cette inégalité de Taylor-Lagrange nécessite $a \leqslant b$.

Proposition 5.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange, deuxième version)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $\left| f^{(n+1)}(t) \right| \leqslant K$. Alors $\forall (a, b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} K.$$

Exercice 6. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 7. En utilisant la fonction $f : x \longrightarrow \ln(1+x)$ définie sur $[0, +\infty[$, à laquelle on appliquera l'inégalité de Taylor-Lagrange, étudier la convergence de la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

6 Extension au cas des fonctions complexes

Définition 6.1 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes, rappel)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ et $f \in C^0(I,\mathbb{C})$. On définit $\int_a^b f \in \mathbb{C}$ par $\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

Cette définition permet de généraliser plusieurs résultats obtenus dans le cas de fonctions à valeurs réelles :
- La formule d'intégration d'une constante et plus généralement les relations intégrale-primitive.
- La linéarité et la relation de Chasles.
- L'inégalité triangulaire : si $a \leqslant b$, $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
- La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange (mais seulement la version avec les modules).

La positivité et la croissance ne sont pas généralisables (puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$).