Variables aléatoires

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 février 2025

Table des matières

1 Variables aléatoires

1.1 Définition et notations

Définition 1.1 (Variable aléatoire)

Soit Ω un univers fini. On appelle **variable aléatoire** toute application définie de Ω vers un ensemble E. Si X est une variable aléatoire, on note $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Remarque. Puisque Ω est un univers fini, $X(\Omega)$ est un ensemble fini. On parle alors de variable aléatoire finie.

Exemple. On lance n fois une pièce équilibrée, en notant 1 pour face et 0 pour pile. Alors $\Omega = \{0,1\}^n$.

1. Soit X_1 la fonction qui à un tirage associe 1 si le premier lancer donne face, 0 sinon. C'est une variable aléatoire et $X_1(\Omega) = \{0,1\}$.
2. Soit X_2 la fonction qui à un tirage associe le nombre de face. C'est une variable aléatoire et $X_2(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
3. Soit X_3 la fonction qui à un tirage associe le rang d'apparition du premier pile, s'il existe, et 0 sinon. C'est une variable aléatoire et $X_3(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Remarque. On utilise des notations entre parenthèses ou accolades pour désigner les événements associés à une variable aléatoire X. Par exemple,

L'événement « X prend la valeur x » est noté $\{X = x\}$ ou $(X = x)$.

L'événement « X prend une valeur inférieure à x » est noté $\{X \leqslant x\}$ ou $(X \leqslant x)$.

L'événement « X prend une valeur de l'ensemble A » est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.

À l'intérieur d'une probabilité, on s'autorise pour des raisons de lisibilité à retirer les accolades ou parenthèses supplémentaires. On peut donc écrire $P(X = x)$ en lieu et place de $P(\{X = x\})$ ou $P((X = x))$.

Proposition 1.2 (Système complet d'événements lié à une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire finie, alors $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Exemple. On reprend la variable aléatoire X_1 de l'exemple précédent. Alors $(\{X_1 = 0\}, \{X_1 = 1\})$ est un système complet d'événements, qui correspond à la disjonction de cas « le premier lancer donne pile » et « le premier lancer donne face ».

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.3 (Loi d'une variable aléatoire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire, on appelle **loi de** X l'application P_X définie de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ dans $[0,1]$ par :

$$\forall A \subset X(\Omega), \qquad P_X(A) = P(X \in A).$$

Proposition 1.4 (La loi d'une variable aléatoire est une probabilité)

Soit X une variable aléatoire, l'application P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Remarque. Comme P_X est une probabilité, elle est entièrement déterminée par sa distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. En particulier, pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$.

Remarque. Soit X et Y deux variables aléatoires. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

Exercice 1. On lance une pièce équilibrée, et on définit la variable aléatoire Z comme valant 0 si la pièce donne face, et 1 sinon. Déterminer la loi de Z.

Exercice 2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la n-liste $(u_1, \dots, u_n)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par $u_i = \alpha \times i$. Cette n-liste définit-elle une loi d'une variable aléatoire réelle ?

Proposition 1.5 (Variable aléatoire $g(X)$)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E et g une fonction définie sur E. La fonction $g(X)$ est également une variable aléatoire et pour tout $A \in \mathcal{P}(g(X(\Omega)))$,

$$P_{g(X)}(A) = P(g(X) \in A) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) \in A}} P(X = x).$$

Remarque. En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $X \sim Y$, et si la composition par g est bien définie, $g(X) \sim g(Y)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$, $P(X = -1) = \frac{4}{9}$, $P(X = 1) = \frac{4}{9}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{9}$. On pose $Y = X^2$, déterminer la loi de Y.

1.3 Variables aléatoires usuelles

Définition 1.6 (Loi uniforme)

Soit E un ensemble fini non vide. Une variable aléatoire X suit la loi **uniforme** sur E, ce qu'on note $X \sim \mathcal{U}(E)$, lorsque P_X est la probabilité uniforme sur E, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad P_X(A) = P(X \in A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(E)}.$$

Remarque. Si $X \sim \mathcal{U}(E)$, on a en particulier $X(\Omega) = E$ et $\forall k \in E$, $P(X = k) = \frac{1}{\mathrm{Card}(E)}$.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue un tirage dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Soit X le numéro de la boule tirée, alors $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Définition 1.7 (Loi de Bernoulli)

Une variable aléatoire X suit la loi **de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$, ce qu'on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, lorsque :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Remarque. On interprète souvent un tirage de variable de Bernoulli comme le résultat d'une expérience, avec la convention que $\{X = 1\}$ représente un succès et $\{X = 0\}$ un échec.

Exercice 4. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X^2 ?

Définition 1.8 (Variable indicatrice d'un événement)

Soit Ω un univers fini et $E \in \mathcal{P}(\Omega)$. La variable aléatoire X définie par $\begin{cases} X = 1 \text{ si } E \text{ est réalisé} \\ X = 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est appelée la **variable indicatrice de l'événement** E. On la note $\mathbb{1}_E$.

Exemple. On lance un dé. Soit A l'événement « tirer un numéro pair ». La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ vaut 1 si on tire un numéro pair et 0 sinon.

Remarque. La variable indicatrice $\mathbb{1}_E$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(E)$.

Définition 1.9 (Loi binomiale)

Une variable aléatoire X suit la loi **binomiale** de paramètres $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, ce qu'on note, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, lorsque :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarque. $X \sim \mathcal{B}(1,p) \Leftrightarrow X \sim \mathcal{B}(p)$.
On proposera une interprétation du cas général $\mathcal{B}(n,p)$ dans la suite du chapitre, quand on aura défini la notion d'indépendance pour des variables aléatoires.

1.4 Loi conditionnelle

Définition 1.10 (Loi conditionnelle d'une variable aléatoire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(A) > 0$.
On appelle **loi conditionnelle de X sachant** A la loi de X pour la probabilité P_A, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ dans $[0,1]$ qui à $B \subset X(\Omega)$ associe $P_A(X \in B)$.

Remarque. La loi conditionnelle de X sachant A est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(P_A(X=x))_{x \in X(\Omega)}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de X sachant $\{X \leqslant n\}$?

2 Couples de variables aléatoires

Définition 2.1 (Couple de variables aléatoires)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On appelle **couple de variables aléatoires** toute variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans un produit.

Exemple. Soit X, Y deux variables aléatoires. L'application Z définie sur Ω par $\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est un couple de variables aléatoires. On note $Z = (X,Y)$.

Définition 2.2 (Loi conjointe, lois marginales)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X, Y deux variables aléatoires sur Ω.
- On appelle **loi conjointe de X et Y** la loi $P_{(X,Y)}$ du couple de variables aléatoires (X,Y).
- On appelle **première loi marginale** de (X,Y) la loi P_X de la variable aléatoire X, et **deuxième loi marginale** la loi P_Y de la variable aléatoire Y.

Remarque. Ces définitions et leurs propriétés s'étendent sans difficultés à des n-uplets de variables aléatoires.

Remarque. On a $(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Pour déterminer la loi conjointe d'un couple, on peut ainsi se contenter d'étudier la distribution de probabilités $(P(X=x \text{ et } Y=y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$.
Attention quand même : dans le cas général, il n'y a pas égalité entre $(X,Y)(\Omega)$ et $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Remarque. Pour alléger les notations, on note souvent $P(X=x, Y=y)$ à la place de $P(X=x \text{ et } Y=y)$.

Exercice 6. On lance deux dés. On note X le plus grand des deux chiffres obtenus et Y le plus petit. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

Exercice 7. Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules vertes et 5 boules bleues. On tire simultanément 3 boules dans l'urne. Parmi les boules ainsi obtenues, on note X le nombre de boules blanches et Y le nombre de boules vertes. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

Proposition 2.3 (Calcul des lois marginales à partir de la loi conjointe)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X, Y deux variables aléatoires sur Ω. La loi conjointe $P_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) détermine entièrement ses lois marginales P_X et P_Y. Plus précisément,

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y),$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$$

Remarque. Dans le cas général, il n'est par contre pas possible d'obtenir la loi conjointe à partir des lois marginales.

Remarque. Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent donc en sommant les éléments de chaque ligne ou de chaque colonne.

Exercice 8. On se place de nouveau dans le contexte de l'exercice 6. Déterminer les lois marginales de X et Y.

3 Indépendance de variables aléatoires

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1 (Indépendance de deux variables aléatoires)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω. On dit qu'elles sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ lorsque pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.

Proposition 3.2 (Distribution de probabilités d'un couple de variables indépendantes)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω. Elles sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Remarque. Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes (et dans ce cas seulement), on peut donc déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois marginales.

Exemple. On tire deux dés et on note X le résultat du premier dé, Y celui du deuxième dé. Les variables aléatoires X et Y sont alors indépendantes. En particulier,

$$\forall (i, j) \in [\![1, 6]\!]^2, \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Remarque. Pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que $P(X = x, Y = y) \neq P(X = x)P(Y = y)$.
Souvent, on cherche $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que $P(X = x, Y = y) = 0$ et $P(X = x) \neq 0$, $P(Y = y) \neq 0$ (c'est-à-dire on cherche s'il y a des zéros dans le tableau de la loi conjointe).

Exercice 9. On tire deux dés simultanément. On note X la somme des deux dés et Y leur produit, montrer que X et Y ne sont pas des variables aléatoires indépendantes.

Définition 3.3 (Indépendance d'un n-uplet de variables aléatoires)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires définies sur un univers Ω. On dit qu'elles sont **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour tout $(A_1, \ldots, A_n)$ avec $A_i \in \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(\{X_i \in A_i\})_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont (mutuellement) indépendants.

Remarque. Comme dans le cas d'un couple, cela équivaut à vérifier que la distribution de probabilités de $(X_1, \ldots, X_n)$ est donnée par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n).$$

Remarque. Les n-uplets de variables aléatoires sont souvent utilisés pour modéliser une succession de n expériences aléatoires indépendantes. On utilise alors une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes, où X_i donne une information sur le résultat de la i-ème expérience.

3.2 Lemme des coalitions

Proposition 3.4 (Indépendance et composition)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω. Soit f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Proposition 3.5 (Lemme des coalitions)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes.
Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$, f une fonction définie sur $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_p(\Omega)$ et g une fonction définie sur $X_{p+1}(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$. Alors $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Remarque. Ce résultat reste valable dans le cas de plus de deux coalitions.

Exemple. Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des variables aléatoires indépendantes, le lemme des coalitions donne que les variables $X_1 - X_2 + 2X_4^2$ et $X_3 - X_5^2$ sont indépendantes.

Exemple. Soit X et Y deux variables aléatoires. Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors par contraposée du lemme des coalitions X et Y ne le sont pas non plus.

3.3 Retour sur les variables aléatoires binomiales

Proposition 3.6 (Somme de lois de Bernoulli)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors :

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Remarque. Cette méthode d'étude d'une fonction de plusieurs variables aléatoires par l'utilisation de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements engendré par une des variables est classique.

Remarque. On savait déjà qu'un résultat de loi de Bernoulli pouvait s'interpréter comme la survenue ou non d'un succès (de probabilité p) lors d'une expérience.
Un résultat de loi binomiale peut donc s'interpréter comme le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n expériences indépendantes, ayant chacune la probabilité p de succès.

Exercice 10. On effectue 10 lancers de dé et on pose X le nombre de lancers ayant renvoyé 1 ou 6. Déterminer la loi de X.