Matrices et applications linéaires

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 février 2025

Table des matières

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p, q seront des entiers de $\mathbb{N}^*$.

1 Matrices d'une application linéaire

1.1 Construction de matrices

Définition 1.1 (Vecteur colonne des coordonnées)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base B_E. Soit $x \in E$. On appelle **vecteur colonne des coordonnées** de x dans la base B_E le vecteur colonne $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ formé des coordonnées de x dans la base B_E.

Exemple. On considère le polynôme $P(X) = 1 + X^2 + 3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. Le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque. L'ordre des vecteurs dans la base est important.

Définition 1.2 (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base B_E. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_q)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base** B_E la matrice $\mathrm{Mat}_{B_E}(\mathcal{F})$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur f_j dans la base B_E.

Remarque. Si $x \in E$, $\mathrm{Mat}_{B_E}(x)$ est la matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base B_E.

Définition 1.3 (Matrice d'une application linéaire dans des bases)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base $B_E = (e_1, \ldots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base B_F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de l'application f dans les bases B_E et B_F**, notée $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$, la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base B_F.

Remarque. On a donc $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f) = \mathrm{Mat}_{B_F}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

Exercice 1. On considère l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f((x, y, z)) = (2x + y, 4y, y + z, 6z).$$

On note $B_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B_4 la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer la matrice de l'application f dans les bases B_3 et B_4.
2. Déterminer la matrice de l'application f dans les bases $B_3' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 - e_3)$ et B_4.

Définition 1.4 (Matrice d'un endomorphisme dans une base)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base $B = (e_1, \ldots, e_p)$ et f un endomorphisme de E. On appelle **matrice de l'application f dans la base** B, notée $\mathrm{Mat}_B(f)$, la matrice carrée de $M_p(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est composée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base B.

Remarque. Soit $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{id}_E(e_i) = e_i$. Donc $\mathrm{Mat}_B(\mathrm{id}_E) = I_p$: c'est l'un des rares cas où la matrice ne dépend pas de la base de E choisie. De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice de l'homothétie $\lambda\,\mathrm{id}_E$ est λI_p.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à un polynôme $P(X)$ associe son polynôme dérivé $P'(X)$. On note B la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\mathrm{Mat}_B(g)$.

Exercice 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on note r la rotation de centre 0 et d'angle θ. Déterminer sa matrice dans la base canonique B.

Proposition 1.5 (Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base B_E, et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base B_F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$, $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{B_E}(x)$, $y \in F$ et $Y = \mathrm{Mat}_{B_F}(y)$. Alors :

$$y = f(x) \iff Y = AX.$$

Exemple. On réutilise l'application g de dérivation et le polynôme $P(X) = 1 + X^2 + 3X^3$ étudiés précédemment. Alors,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $g(P(X)) = 0 + 2X + 9X^2 + 0X^3 = 2X + 9X^2$. On retrouve ainsi bien l'expression du polynôme dérivé.

1.2 Opérations usuelles

Proposition 1.6 (Isomophisme entre applications linéaires et matrices)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, de base B_E et F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de base B_F. L'application $\varphi : f \mapsto \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque. Ce résultat montre au passage que $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$, résultat qui avait été admis dans le chapitre d'approfondissement sur les applications linéaires.

Proposition 1.7 (Matrice d'une composée d'applications linéaires)

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives B_E, B_F et B_G. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{B_E,B_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{B_F,B_G}(g)\, \mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$$

Proposition 1.8 (Isomorphismes et inversibilité de matrices)

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de bases B_E et B_F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f)$ est inversible. Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}_{B_F,B_E}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{B_E,B_F}(f))^{-1}.$$

Remarque. En particulier, si E est un espace vectoriel de base B_E et f un endomorphisme de E, alors f est un automorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{B_E}(f)$ est inversible.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f((x, y)) = (x + 2y, 2x + 2y)$. En utilisant des matrices, montrer qu'il s'agit d'un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et donner l'expression de sa réciproque.

2 Rang d'une matrice

2.1 Application linéaire canoniquement associée

Définition 2.1 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée** à A l'application f_A définie de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ par $f_A : X \mapsto AX$.

Remarque. On triche un peu dans cette définition en identifiant $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$, ce qui allège les écritures. Pour passer de l'un à l'autre, il suffit d'écrire le vecteur horizontalement au lieu de verticalement (ou l'inverse).

Remarque. Si on note B_p et B_n les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, l'application linéaire f_A canoniquement associée à A vérifie $\mathrm{Mat}_{B_p,B_n}(f_A) = A$, d'où son nom.

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Donner son application linéaire canoniquement associée, qu'on notera f.

2.2 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 2.2 (Image et noyau d'une matrice)

Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit f_A son application linéaire canoniquement associée. On appelle **image** (resp. **noyau**) de A l'image (resp. le noyau) de f_A. Autrement dit, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f_A)$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f_A)$.

Remarque. Soit $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A et $(E_1, \ldots, E_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. On trouve par produit matriciel : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Vect}(f_A(E_1), \ldots, f_A(E_p)) = \mathrm{Vect}(AE_1, \ldots, AE_p) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.
Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$

Remarque. Le noyau de A est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$. On peut donc se baser sur les lignes de la matrice pour déterminer son noyau.

Exercice 6. Déterminer le noyau et l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Définition 2.3 (Rang d'une matrice)

Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang** de A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 7. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.4 (Lien entre rang d'une application linéaire et de ses matrices)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et de base B_E, F un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de base B_F, f une application linéaire de E dans F. Soit A la matrice de l'application f dans les bases B_E et B_F. Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

Remarque. Le rang d'une matrice est en particulier égal à celui de son application linéaire canoniquement associée.

Remarque. Le rang d'une application linéaire correspond au rang de n'importe laquelle de ses matrices associées : le choix des bases n'importe pas.

Proposition 2.5 (Matrice de rang n)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible } \iff \operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \iff \operatorname{Im}(A) = \mathbb{K}^n \iff \operatorname{rg}(A) = n.$$

Remarque. $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{K}^n$ signifie entre autres que les colonnes de A engendrent $\mathbb{K}^n$.

Remarque. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Ses colonnes engendrent $\mathbb{K}^n$ si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On retrouve donc la condition d'inversibilité rencontrée dans le chapitre sur les matrices.

Proposition 2.6 (Inversibilité d'une matrice à droite ou à gauche)

Toute matrice carrée inversible à droite où à gauche est inversible.

Remarque. Cela justifie les méthodes de calcul d'inverse par obtention d'un inverse à droite ou à gauche utilisées dans le chapitre sur les matrices.

Proposition 2.7 (Rang de la transposée)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$.

2.3 Lien avec les opérations élémentaires

Proposition 2.8 (Opérations élémentaires sur les lignes et noyau)

Toute opération élémentaire sur les lignes d'une matrice préserve son noyau.

Proposition 2.9 (Opérations élémentaires sur les colonnes et image)

Toute opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice préserve son image.

Proposition 2.10 (Opérations élémentaires et rang)

Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice préserve son rang.

Remarque. Ce résultat fournit une méthode concrète pour déterminer le rang d'une matrice, en se ramenant à des matrices de plus en plus petites :

- Si $A = 0$, il est immédiat que $\operatorname{rg}(A) = 0$ (et l'algorithme se termine).
- Sinon, au moins un coefficient est non nul et peut servir de pivot :
  - On le place en haut à gauche par permutation des lignes puis des colonnes (contrairement aux calculs d'inverses ou aux résolutions de système, on peut ici mélanger les opérations sur les lignes et les colonnes).
  - À l'aide de ce pivot, on fait apparaître des 0 sur la première colonne (puis sur la première ligne, mais cette étape n'a pas besoin d'apparaître dans les calculs).

  À ce stade, la première colonne est clairement non combinaison linéaire des autres. On note A' la matrice obtenue en retirant à A sa première ligne et sa première colonne, donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A') + 1$.

Cet algorithme termine de manière certaine puisque les tailles des matrices manipulées sont strictement plus petites à chaque étape.

Exercice 8. À l'aide d'opérations élémentaires, déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3 Changements de bases

3.1 Matrice de passage

Définition 3.1 (Matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E. On appelle **matrice de passage de la base B à la base B'** la matrice $P_B^{B'} = \mathrm{Mat}_B(B') = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)$.

Exercice 9. On pose $R_0(X) = 1$, $R_1(X) = X - 1$ et $R_2(X) = (X-1)^2$. Alors $B = (1, X, X^2)$ et $B' = (R_0, R_1, R_2)$ sont deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer la matrice de passage de B à B'.
2. Déterminer la matrice de passage de B' à B.

Proposition 3.2 (Inversibilité d'une matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E.
Alors $P_B^{B'}$ est une matrice inversible d'inverse $\left(P_B^{B'}\right)^{-1} = P_{B'}^{B}$.

3.2 Changements de bases et matrices semblables

Proposition 3.3 (Changement de base pour un vecteur)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E. Soit $x \in E$, on pose $X = \mathrm{Mat}_B(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{B'}(x)$. On a alors

$$X = P_B^{B'} X'.$$

Exercice 10. À l'aide de l'exercice 9, déterminer les coordonnées de $T(X) = 7 - 3X + 4X^2$ dans la base B'.

Proposition 3.4 (Changements de bases pour une application linéaire)

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, B et B' deux bases de E, C et C' deux bases de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{B',C'}(f) = P_{C'}^{C} \mathrm{Mat}_{B,C}(f) P_B^{B'}.$$

Remarque. Attention, cette formule est différente de la formule de changement de base pour un vecteur.

Proposition 3.5 (Changements de bases pour un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f) = P_{B'}^{B} \mathrm{Mat}_B(f) P_B^{B'}.$$

Exercice 11. On se place dans le contexte de l'exercice 9. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - (b + 4a)X + 6a + 4b + 3c.$$

Déterminer la matrice de f dans la base B, puis la matrice de f dans la base B'.

Définition 3.6 (Matrices semblables)

Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que les matrices M et N sont **semblables** lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PNP^{-1}$.

Remarque. $M = PNP^{-1} \iff N = P^{-1}MP$, le côté où l'on met P^{-1} dans la formule n'a donc pas d'importance.

Remarque. Soit E un espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et B, B' deux bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Mat}_B(f)$ et $\mathrm{Mat}_{B'}(f)$ sont des matrices semblables. En effet, si on pose $P = P_{B'}^{B}$, on a $\mathrm{Mat}_{B'}(f) = P\,\mathrm{Mat}_B(f) P^{-1}$.

4 Application aux systèmes linéaires

Proposition 4.1 (Ensemble des solutions du système homogène)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$ est l'espace vectoriel $\text{Ker}(A)$, de dimension $p - \text{rg}(A)$.

Exercice 12. Déterminer la dimension de l'ensemble des solutions du système linéaire : $(\mathcal{S}) \begin{cases} x - 2y + z - t = 0 \\ 2x - 4y - z - 3t = 0 \\ 5x - 10y - z - 7t = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Proposition 4.2 (Condition nécessaire et suffisante pour un système compatible)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B \in \text{Im}(A)$.

Définition 4.3 (Système de Cramer)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système $AX = B$ est dit de Cramer lorsque A est inversible.

Remarque. Cette définition est indépendante du second membre du système.

Proposition 4.4 (Solution d'un système de Cramer)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si le système $AX = B$ est de Cramer, alors il possède une unique solution.

Exercice 13. Montrer que le système linéaire $(\mathcal{S}) \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}t = 1 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}t = 3 \\ \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}t = 7 \\ \frac{1}{4}t = -1 \end{cases}$ est un système de Cramer.