Matrices et applications linéaires

Exercice 1 (★). Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique :

1. la symétrie axiale, dans $\mathbb{R}^2$, par rapport à la droite d'équation $y = -x$.
2. la rotation, dans $\mathbb{R}^2$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ (par rapport à l'origine).
3. la rotation, dans $\mathbb{R}^2$, d'angle $\frac{\pi}{6}$ (par rapport à l'origine).

Exercice 2 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacune des applications linéaires φ suivantes, déterminer la matrice qui la représente dans une base bien choisie (on ne demande pas de montrer que la famille choisie est une base).

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array}$
2. le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_3)$.
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + \int_0^1 P(t)dt \end{array}$
4. $\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \exp) & \to & \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \exp) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

Exercice 3 (★). Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose $f_3 = (-1, 1, 1)$, $f_2 = u(f_3) - f_3$ et $f_1 = u(f_2) - f_2$.

1. Calculer les coordonnées de f_2 et f_1 dans la base canonique.
2. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice N de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
2. Justifier que cette matrice est inversible puis déterminer son inverse sans effectuer de calculs.

Exercice 5 (★). Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P(X)) = 2XP'(X) - (X^2 - 1)P''(X)$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
2. A l'aide de cette matrice, déterminer le rang de φ, puis une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et enfin une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 6 (★). Déterminer le rang et la dimension du noyau des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 7 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ deux matrices telles que $AB = 0$ et $(A+B)$ est inversible.

1. Donner un exemple de deux matrices qui vérifient ces hypothèses.
2. Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leqslant n$.
3. Comparer $\mathrm{Im}(A + B)$ et $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) = n$.

Exercice 8 (★). Pour les bases suivantes, déterminer la matrice de passage de la base B à la base B' :

1. B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, -2)$.
2. $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
3. B est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $B' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.
4. $B = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et B' est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9 (★★). Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que φ est un projecteur, et déterminer une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$.
2. Déterminer les matrices de passage depuis et vers la base canonique : $P = P_{\mathrm{Can}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathrm{Can}}$.
3. Sans aucun calcul, justifier que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exercice 10 (★★). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé canoniquement à A.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et de $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.
2. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice B de u est diagonale.
3. Déterminer des matrices P et P^{-1} telles que $A = PBP^{-1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n puis A^n.

Exercice 11 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée qui ne contient que des 1. On note f l'application linéaire canoniquement associée à J.

1. Déterminer le rang de f, et la dimension de son noyau.
2. Soit v le vecteur $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ (écrit ici en ligne, mais qui pourra librement être écrit en colonne). Calculer $f(v)$, et montrer qu'il s'agit d'un vecteur colinéaire à v.
3. Soit $(u_1, \dots, u_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (v, u_1, \dots, u_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
4. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$. On notera $\tilde{J}$ cette matrice.
5. Expliciter des vecteurs $u_1, \dots, u_{n-1}$ qui conviennent comme base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Conseil : bricoler avec les colonnes de J.
6. En déduire la relation de passage entre J et $\tilde{J}$, à l'aide de matrices de passages que l'on précisera (au moins l'une des deux).

Exercice 12 (Type DS)**.** On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P.$$

   (a) Rappeler la base canonique de E et en déduire $\dim(E)$.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.
   (d) La matrice M est-elle inversible ? Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (e) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (f) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^4 = 0_E$ et $u^3 \neq 0_E$. On pose $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.
   (a) Soit $P \in E$ tel que $P \notin \mathrm{Ker}(u^3)$. Montrer que $B = (P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de l'endomorphisme u dans la base B.
   (c) Justifier que la matrice de l'endomorphisme g dans la base B vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (d) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer sa réciproque g^{-1} en fonction de u.