Séries

Exercice 1 (★). Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série converge puis donner sa somme si possible :

1. $\sum_{n\geqslant 0} n^2$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{3^n}$
4. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$
6. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{5}{6^n}$
7. $\sum_{n\geqslant 0} 2^n$
8. $\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice 2 (★★). Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série converge puis donner sa somme si possible :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!}$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Exercice 3 (★★). On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire u_n sous la forme $u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$.
2. Calculer alors la somme de la série.

Exercice 4 (★). Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{n+1}{n}$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
4. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$
5. $u_n = \frac{1}{n^2+\sin(n^6)}$
6. $u_n = \frac{n^2+3n+4}{2(n+1)^4+\ln(n)}$
7. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$
8. $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$
9. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{e^n}$
10. $u_n = \frac{(-1)^n \tan(\frac{1}{n}) n^2}{e^{\frac{n}{2}}}$
11. $u_n = \frac{3n^2 - \ln(n+1)}{5(n+1)^3}$
12. $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$

Exercice 5 (★). Étudier la convergence des séries de terme général

1. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$
2. $v_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Exercice 6 (★). On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. Montrer alors que la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ converge aussi.

Exercice 7 (★★). Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$
2. $u_n = \ln\left(\frac{2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$
3. $u_n = \frac{\cos(n^2) + n\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$

Exercice 8 (★★). On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que pour tous entiers n et m dans $\mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{n+m+1} \frac{1}{x^3}dx \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.
3. En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 (★★★). Démontrer la convergence de la série de terme général ne^{-n^2}, puis montrer que ses restes R_n vérifient $|R_n| \leqslant \frac{1}{2}e^{-n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 10 (★★). Soit $x \in]-1,1[$ et P un polynôme de degré inférieur à 2. On cherche à étudier $\sum P(n)x^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que S_n est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
2. En exprimant $S_n'(x)$ de deux manières différentes, montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ converge et donner sa somme.
3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(n+2)x^n$ est convergente et donner sa somme.
4. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$ existent et déterminer leurs valeurs.
5. De façon générale, quelle méthode adopter pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconque ?

Exercice 11 (Type DS)**.** On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\text{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\text{ch}(u_n)}$.

1. Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi.
2. Rappeler le tableau de variations de la fonction ch, ainsi que son développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et décroissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est négative.
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n diverge.
5. (a) Montrer que : $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 diverge.
   (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.