Séries

Exercice 1 (★). Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série converge puis donner sa somme si possible :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{2}{3^n}$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$
6. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{5}{6^n}$
7. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n$
8. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Résultat attendu :

1. diverge
2. converge vers 2
3. converge vers 3
4. converge vers 1
5. converge vers e^2
6. converge vers 1
7. diverge
8. converge vers $\frac{4}{3}$

Exercice 2 (★★). Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série converge puis donner sa somme si possible :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{n!}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$

Résultat attendu :

1. converge vers e^{-1}
2. converge vers $4e$
3. converge vers $\frac{5}{2}$.

Exercice 3 (★★). On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire u_n sous la forme $u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$.
2. Calculer alors la somme de la série.

Résultat attendu :

1. $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$ conviennent.
2. La somme de la série vaut $\frac{1}{4}$.

Exercice 4 (★). Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{n+1}{n}$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
4. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$
5. $u_n = \frac{1}{n^2+\sin(n^6)}$
6. $u_n = \frac{n^2+3n+4}{2(n+1)^4+\ln(n)}$
7. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$
8. $u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$
9. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{e^n}$
10. $u_n = \frac{(-1)^n \tan(\frac{1}{n})n^2}{e^{\frac{n}{2}}}$
11. $u_n = \frac{3n^2-\ln(n+1)}{5(n+1)^3}$
12. $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$

Résultat attendu :

1. diverge
2. diverge
3. converge
4. diverge
5. converge
6. converge
7. converge
8. converge
9. converge
10. converge
11. diverge
12. diverge

Exercice 5 (★). Étudier la convergence des séries de terme général

1. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$
2. $v_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Résultat attendu :

1. converge
2. diverge

Exercice 6 (★). On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. Montrer alors que la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ converge aussi.
Résultat attendu : On montre que v est à termes positifs, et on se ramène à une comparaison avec u.

Exercice 7 (★★). Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$
2. $u_n = \ln\left(\frac{2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$
3. $u_n = \frac{\cos(n^2)+n\sin(n)}{n^2\sqrt{n}}$

Résultat attendu :

1. converge
2. diverge
3. converge

Exercice 8 (★★). On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que pour tous entiers n et m dans $\mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{n+m+1} \frac{1}{x^3} dx \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.
3. En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Résultat attendu :

1. C'est (à décalage d'indice près) le reste d'une série convergente, v converge donc vers 0.
2. On procède par encadrement série/intégrale.
3. $v_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 9 (★★★). Démontrer la convergence de la série de terme général ne^{-n^2}, puis montrer que ses restes R_n vérifient $|R_n| \leqslant \frac{1}{2}e^{-n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Résultat attendu : Pour la convergence, on utilise les propriétés des séries à terme général positif. Pour l'inégalité, on utilise une comparaison série/intégrale bien choisie, puis on calcule l'intégrale par primitivation de l'expression.

Exercice 10 (★★). Soit $x \in]-1,1[$ et P un polynôme de degré inférieur à 2. On cherche à étudier $\sum P(n)x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que S_n est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
2. En exprimant $S_n'(x)$ de deux manières différentes, montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ converge et donner sa somme.
3. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(n+2)x^n$ est convergente et donner sa somme.
4. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$ existent et déterminer leurs valeurs.
5. De façon générale, quelle méthode adopter pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconque ?

Résultat attendu :

1. C'est une fonction polynôme.
2. On dérive une fois le polynôme, une fois l'expression obtenue par formule de somme géométrique. L'égalité entre les deux expressions donne la convergence de la série étudiée vers $\frac{1}{(1-x)^2}$.
3. On procède de même en redérivant. On obtient une convergence vers $\frac{2}{(1-x)^3}$.
4. On procède par combinaison linéaire de séries convergentes. Les sommes valent $\frac{x}{(1-x)^2}$ et $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$.

Exercice 11 (Type DS)**.** On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)}$.

1. Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi.
2. Rappeler le tableau de variations de la fonction ch, ainsi que son développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et décroissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est négative.
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n diverge.
5. (a) Montrer que : $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 diverge.
   (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

Résultat attendu :

1. On suppose que $\sum x_n$ converge, donc son terme général converge vers 0. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, donc $x_n^2 = o(x_n)$. Or $\sum x_n$ converge, donc par critère de convergence de séries à termes positifs, $\sum x_n^2$ converge.
2. Le cours donne $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ainsi que le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $u_n > 0$ ».
   — $u_0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors $u_n > 0$. De plus, $\mathrm{ch}(u_n) \geqslant 1 > 0$, donc par quotient $u_{n+1} > 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Donc (u_n) est strictement positive.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)} - u_n = u_n \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(u_n)} - 1\right) = u_n \frac{1 - \mathrm{ch}(u_n)}{\mathrm{ch}(u_n)} \leqslant 0$. Donc (u_n) est décroissante.
   Variante : comme on commence par montrer la stricte positivité, on peut aussi montrer la décroissance en établissant que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
   (b) D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)}$ et ch est continue sur $\mathbb{R}$, donc par théorème du point fixe, $\ell = \frac{\ell}{\mathrm{ch}(\ell)}$. On en déduit $\ell(\mathrm{ch}(\ell) - 1) = 0$, et donc $\ell = 0$. Donc (u_n) converge vers 0.
4. (a) Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \leqslant 0$ puisque $u_n > 0$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{\mathrm{ch}(u_n)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{ch}(0)} - 1 = 0$, par convergence de (u_n) et continuité de ch en 0.
   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_n) - \ln(u_0) = \ln(u_n)$, où on a utilisé la définition de v et un télescopage. Or (u_n) converge vers 0, donc $\sum \ln(1 + v_k)$ diverge vers $-\infty$. La question précédente donne que (v_n) converge vers 0, l'équivalent usuel du logarithme donne donc $-\ln(1 + v_k) \sim -v_k \geqslant 0$. Donc $\sum(-v_k)$ diverge, donc $\sum v_k$ diverge.
5. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{\mathrm{ch}(u_n)} - 1 = \frac{1 - \mathrm{ch}(u_n)}{\mathrm{ch}(u_n)} \sim \frac{1 - \mathrm{ch}(u_n)}{1}$, puisque $\mathrm{ch}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$.
   Le développement limité rappelé en question 2 donne (après composition à droite par u_n qui converge vers 0) : $\mathrm{ch}(u_n) = 1 + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$. Donc $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim u_n^2$. Donc $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$.
   (b) La question précédente donne $u_n^2 \sim -2v_n \geqslant 0$. Or $\sum v_n$ diverge, donc $\sum u_n^2$ diverge également.
   (c) La contraposée de la question 1 donne que $\sum u_n$ diverge.