Déterminants

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 février 2025

Table des matières

1	Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	2
1.1	Définition	2
1.2	Cas particulier des dimensions 2 et 3	2
1.3	Propriétés	3
2	Déterminant d'un endomorphisme	3
3	Déterminant d'une matrice carrée	4
4	Calcul des déterminants	4
4.1	Pivot de Gauss	4
4.2	Développement par ligne ou par colonne	5

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n désignera un entier de $\mathbb{N}^*$.

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

1.1 Définition

Définition 1.1 (Forme alternée)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f une application de E^n dans $\mathbb{K}$. On dit que f est **alternée** si f est nulle sur toute famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Exemple. L'application de E^2 dans $\mathbb{K}$ définie par $f(x, y) = x - y$ est alternée.

Définition 1.2 (Déterminant dans une base)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit B une base de E . Il existe une unique application $\det_B$ définie de E^n dans $\mathbb{K}$ qui vérifie :

- $\det_B$ est linéaire par rapport à chaque variable,
- $\det_B$ est alternée,
- $\det_B(B) = 1$.

On l'appelle **déterminant dans la base B** .

Proposition 1.3 (Antisymétrie du déterminant)

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. Alors :

$$\det_B(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{\text{position } i}, \dots, \underbrace{x_i}_{\text{position } j}, \dots, x_n) = -\det_B(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

Remarque. Autrement dit, intervertir deux vecteurs inverse le signe du déterminant.

Remarque. Le résultat d'antisymétrie est énoncé pour $\det_B$, mais la démonstration montre qu'il reste vrai pour toute application de E^n dans $\mathbb{K}$ linéaire selon chaque variable et alternée.

1.2 Cas particulier des dimensions 2 et 3

Proposition 1.4 (Déterminant en dimension 2)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 2 et B une de ses bases. Soit $(x, y) \in E^2$ de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans la base B . Alors :

$$\det_B(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Remarque. En prévision de la suite, on notera $\det_B(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$. Cela donne en particulier un moyen mnémotechnique pour retenir la formule :

Remarque. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Alors $|\det_B(u, v)|$ est l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v .

En effet, l'application qui à deux vecteurs associe l'aire algébrique qu'ils délimitent est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, et vaut 1 sur la base canonique.

On rappelle que l'aire d'un parallélogramme se calcule dans le cas général par la formule : base $\times$ hauteur.

Proposition 1.5 (Déterminant en dimension 3)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et B une de ses bases. Soit $(x, y, z) \in E^3$ de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) dans la base B . Alors :

$$\det_B(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2.$$

Remarque. En prévision de la suite, on notera $\det_B(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Remarque. On se place dans le plan $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique. Soit $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$. Alors $|\det_B(u, v, w)|$ est le volume du parallélépipède défini par les vecteurs u , v et w .

En effet, l'application qui à trois vecteurs associe le volume algébrique qu'ils délimitent est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, et vaut 1 sur la base canonique.

1.3 Propriétés

Proposition 1.6 (Application linéaire par rapport à chaque variable et alternée)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit B une base de E . Soit f une application de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable et alternée. Alors f est un multiple de $\det_B$.

Proposition 1.7 (Formule de passage d'une base à une autre)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit B et B' deux bases de E . Alors :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_{B'}(X) = \det_{B'}(B) \times \det_B(X).$$

Proposition 1.8 (Caractérisation d'une base à l'aide du déterminant)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit B une base de E et soit $X \in E^n$ une famille de n vecteurs de E . Alors :

$$X \text{ est une base de } E \iff \det_B(X) \neq 0.$$

Exercice 1. Déterminer si la famille $((1, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 2.1 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, B une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. La valeur $\det_B(f(B))$ ne dépend pas de la base B choisie. On l'appelle **déterminant de f** et on la note $\det(f)$.

Remarque. Le déterminant n'existe que pour un endomorphisme (pas pour n'importe quelle application linéaire).

Exemple. En notant B une base de E , on trouve $\det(\text{id}_E) = \det_B(\text{id}_E(B)) = \det_B(B) = 1$.

Proposition 2.2 (Déterminant d'une composée)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.

Proposition 2.3 (Caractérisation des automorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, on a aussi $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 3.1 (Déterminant d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, que l'on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarque. Attention, le déterminant n'est défini que pour des matrices **carrées**.

Exemple. Soit B_n la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors $\det(I_n) = \det_{B_n}(B_n) = 1$.

Remarque. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit B une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. La définition du déterminant d'un endomorphisme donne alors directement $\det(f) = \det(\text{Mat}_B(f))$.

Proposition 3.2 (Multiplication par un scalaire)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Remarque. Attention, on ne peut par contre pas sommer : dans le cas général, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Proposition 3.3 (Déterminant d'un produit)

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, alors $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Proposition 3.4 (Caractérisation de l'inversibilité)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans le cas inversible, on a de plus $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Remarque. On déduit de tout cela que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même déterminant. En effet, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$.

Proposition 3.5 (Invariance par transposition)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A^\top) = \det(A)$.

4 Calcul des déterminants

4.1 Pivot de Gauss

Proposition 4.1 (Effet des opérations élémentaires sur le déterminant)

Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifient pas le déterminant.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient le déterminant par λ .
- Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient le déterminant par -1 .

Remarque. Pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on effectue donc des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes de la matrice, jusqu'à se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire.

Proposition 4.2 (Déterminant d'une matrice triangulaire)

Soit $T = (t_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ une matrice triangulaire. Alors $\det(T) = \prod_{i=1}^n t_{ii}$.

Remarque. On retrouve ainsi un résultat déjà connu : une matrice triangulaire est inversible si et seulement si elle n'a aucun terme diagonal nul.

Exercice 2. Calculer $a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ et $b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4.2 Développement par ligne ou par colonne

Proposition 4.3 (Développement par rapport à une ligne ou une colonne)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on pose $\Delta_{ij}(A)$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne. Alors :

- Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\Delta_{ij}(A))$ (développement par rapport à la i -ème ligne).
- Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\Delta_{ij}(A))$ (développement par rapport à la j -ème colonne).

Exercice 3. En développant suivant la première colonne, calculer $c = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

Remarque. Le développement par rapport à une ligne ou colonne est surtout utile quand une ligne ou colonne contient beaucoup de zéros. Quand ce n'est pas le cas, le pivot de Gauss permet souvent d'aboutir en moins de calculs.

Exercice 4. Déterminer la valeur de $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.