Exercices PCSI
É.Bouchet

Déterminants

Exercice 1 (★). Pour chacune des matrices ci-dessous, calculer son déterminant, déterminer si elle est inversible ou non, et si oui, donner le déterminant de son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Résultat attendu : $\det(A) = -5$, donc A est inversible et $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{5}$. $\det(B) = 17$, donc B est inversible et $\det(B^{-1}) = \frac{1}{17}$. $\det(C) = 0$, donc C n'est pas inversible.

Exercice 2 (★). Calculer le déterminant de :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Résultat attendu : $\det(A) = 18$, $\det(B) = 8$, $\det(C) = -2$.

Exercice 3 (★). On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ la famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
Résultat attendu : C'est une base si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{3}{2}\}$.

Exercice 4 (★). Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = XP'(X+2) + P(1)(X^3 - 1)$.

1. Montrer que f est bien définie et linéaire.
2. Calculer $\det(f)$. L'application f est-elle un automorphisme ?

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\det(f) = -6 \neq 0$, donc f est un automorphisme.

Exercice 5 (★). Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 1 & 2 & t \\ t & 4 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
Résultat attendu : Un pivot de Gauss donne $\det(M_t) = (2-t)^2(4+t)$. La matrice est donc inversible si et seulement si $t \neq 2$ et $t \neq -4$.

Exercice 6 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ son application linéaire canoniquement associée.

1. Montrer que φ_A est une symétrie si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale de 1 et de -1.
2. Dans ce cas, que vaut le déterminant de φ_A ?

Résultat attendu :

1. Par double implication, avec la caractérisation des symétries et un choix de base judicieux.
2. $\det(\varphi_A) = \pm 1$.

Exercice 7 (★★). Soit $n \geqslant 3$ un entier, et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$a_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \\ n-1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b_n = \begin{vmatrix} 1 & x & & & \\ x & 1 & & (0) & \\ & & x & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & x \end{vmatrix} \qquad c_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Résultat attendu : $a_n = (-1)^{n+1} n!$, $b_n = (1-x^2)x^{n-2}$.
Si $x = -1$, $c_n = (-1)^{n-1} n$, sinon $c_n = (-1)^{n-1} \frac{1-(-x)^n}{1+x}$.

Exercice 8 (★★). Pour tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit le déterminant de Vandermonde comme :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(a, b, c)$, pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, puis $V(a, b, c, d)$, pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$. On attend des résultats finaux sous forme factorisée.
2. Exprimer $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ en fonction de $V(a_2, \dots, a_n)$, puis en déduire une formule générale pour $V(a_1, \dots, a_n)$.

Résultat attendu :

1. $V(a, b, c) = (b - a)(c - a)(c - b)$, puis $V(a, b, c, d) = (b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)$.
2. $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n} (a_k - a_1) \right) V(a_2, \dots, a_n) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Exercice 9 (★★). Soit $A(X) = X^3 - X^2 - X + 2$ et $B(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
2. Déterminer la matrice M représentative de f dans la base canonique, et montrer que f est un automorphisme.

Résultat attendu :

1. On utilise le théorème de division euclidienne.
2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $\det(M) = 8 \neq 0$.

Exercice 10 (★★★). Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$.

Calculer le déterminant de taille n suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos(\theta) & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$

Indication : commencer par déterminer une relation de récurrence sur les Δ_n. Par convention, $\Delta_0 = 1$.

Résultat attendu : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \cos(\theta n) + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(\theta n)$.

Exercice 11 (Type DS)**.** L'objectif de l'exercice est de déterminer les couples de fonctions $(u_1, u_2) \in \left(C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right)^2$ solutions du système d'équations différentielles (E) suivant : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u_1'(t) = -7u_1(t) - 5u_2(t) \\ u_2'(t) = 10u_1(t) + 8u_2(t) \end{cases}$.

On fixe $(u_1, u_2) \in (C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, on pose les vecteurs $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ et $U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (E) peut s'écrire sous la forme $\forall t \in \mathbb{R}$, $U'(t) = AU(t)$ pour une matrice A à préciser. Dans la suite de l'exercice, on note φ_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$.
2. L'objectif de cette question est de déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$ vérifiant $\varphi_A(x) = \lambda x$.
   (a) Justifier que ce problème équivaut à déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
   (b) Calculer $\det(A - \lambda I_2)$, en déduire que les seules solutions du problème sont $\lambda = 3$ et $\lambda = -2$.
3. On cherche maintenant à exprimer la matrice A en fonction d'une matrice diagonale.
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_A - 3\,\mathrm{id})$ et de $\mathrm{Ker}(\varphi_A + 2\,\mathrm{id})$.
   (b) En déduire une base B de $\mathbb{R}^2$ pour laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_B(\varphi_A)$ vaut $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (c) Déterminer une matrice P pour laquelle on a $A = PDP^{-1}$ (on explicitera également P^{-1}).
4. Résolution de (E). Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit le vecteur $V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ par $V(t) = P^{-1}U(t)$.
   (a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $V'(t) = P^{-1}U'(t)$.
   (b) En déduire que (E) équivaut à $\forall t \in \mathbb{R}$, $V'(t) = DV(t)$.
   (c) Écrire cette égalité comme un système d'équations différentielles d'inconnues v_1 et v_2, et le résoudre.
   (d) Résoudre le problème initial.

Résultat attendu :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, alors $(E) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, U'(t) = AU(t)$.
2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le problème équivaut à $\exists x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $(\varphi_A - \lambda\,\mathrm{id})(x) = 0$, puis à $\mathrm{Ker}(\varphi_A - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{(0,0)\}$, puis à $(\varphi_A - \lambda\,\mathrm{id})$ non bijective, puis à la non-inversibilité de la matrice $A - \lambda I_2$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} (-7-\lambda) & -5 \\ 10 & (8-\lambda) \end{vmatrix} = (-7-\lambda)(8-\lambda) - 10(-5) = \lambda^2 - \lambda - 6$.
   Les seuls λ solution du problème sont donc les racines de $X^2 - X - 6$, c'est-à-dire 3 et -2.
3. (a) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
   $x \in \mathrm{Ker}(\varphi_A - 3\,\mathrm{id}) \Leftrightarrow (A - 3I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x = x_1(1,-2) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}((1,-2))$.
   Donc $\mathrm{Ker}(\varphi_A - 3\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1,-2))$. Or $(1,-2) \neq (0,0)$ donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_A - 3\,\mathrm{id})$.
   On montre par des calculs similaires que $((-1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_A + 2\,\mathrm{id})$.
   (b) La question précédente nous donne que $(1,-2) \in \mathrm{Ker}(\varphi_A - 3\,\mathrm{id})$, donc $\varphi_A((1,-2)) = 3(1,-2)$, et $(-1,1) \in \mathrm{Ker}(\varphi_A + 2\,\mathrm{id})$, donc $\varphi_A((-1,1)) = -2(-1,1)$. On pose donc $B = ((1,-2),(-1,1))$.
   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $a(1,-2) + b(-1,1) = (0,0)$. Alors $a - b = 0$ et $-2a + b = 0$. Donc $a = b = 0$, et B est libre dans $\mathbb{R}^2$. Or elle a $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.
   Par construction, $\mathrm{Mat}_B(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, donc $B = ((1,-2),(-1,1))$ convient bien.
   (c) Notons C la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathrm{Mat}_C(\varphi_A) = A$ et $\mathrm{Mat}_B(\varphi_A) = D$. On pose $P = P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, la formule de changement de base donne alors $A = P_C^B D P_B^C = PDP^{-1}$.
   On trouve alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ par pivot de Gauss.
4. (a) Par définition de V : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} v_1(t) = -u_1(t) - u_2(t) \\ v_2(t) = -2u_1(t) - u_2(t) \end{cases}$. Comme ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$,
   $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} v_1'(t) = -u_1'(t) - u_2'(t) \\ v_2'(t) = -2u_1'(t) - u_2'(t) \end{cases}$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $V'(t) = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}U'(t)$.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$, $U'(t) = AU(t) \Longleftrightarrow U'(t) = PDP^{-1}U(t) \Longleftrightarrow P^{-1}U'(t) = DP^{-1}U(t) \Longleftrightarrow V'(t) = DV(t)$.
   (c) D'après ce qui précède, (u_1, u_2) est solution de (E) ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $v_1'(t) = 3v_1(t)$ et $v_2'(t) = -2v_2(t)$. Il s'agit de deux équations différentielles linéaires indépendantes (l'une sur v_1, l'autre sur v_2), dont les solutions sont les fonctions de la forme $v_1 : t \mapsto \lambda e^{3t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v_2 : t \mapsto \mu e^{-2t}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
   (d) On a $V(t) = P^{-1}U(t)$, qui équivaut à $U(t) = PV(t)$. D'après la question précédente, le couple (u_1, u_2) est donc solution de (E) si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda e^{3t} \\ \mu e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{3t} - \mu e^{-2t} \\ -2\lambda e^{3t} + \mu e^{-2t} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $u_1(t) = \lambda e^{3t} - \mu e^{-2t}$ et $u_2(t) = -2\lambda e^{3t} + \mu e^{-2t}$.