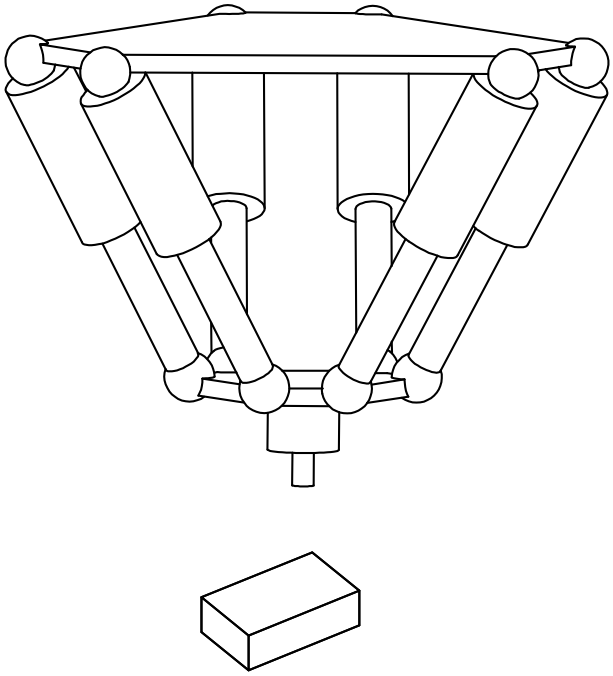
SII – PCSI / Séquence n° 9 – Modélisation des mécanismes
et systèmes complexes

Théorie des mécanismes



Objectifs

Ce cours s'intéresse à l'étude des chaînes de solides (ouvertes ou fermées) dans les systèmes mécaniques et s'appuie très largement sur les notions de comportement cinématique et d'équilibre statique des systèmes. La finalité de ce cours est de pouvoir simplifier le graphe de structure, d'analyser la rigidité des solutions techniques, ou encore de choisir un modèle de solution isostatique ne demandant pas de contraintes géométriques fortes ou permettant une analyse statique simplifiée. Deux approches complémentaires sont systématiquement considérées : un point de vue statique et un point de vue cinématique.

Table des matières

1 Introduction **3**
- 1.1 Hypothèses d'étude et notations . . . 3
- 1.2 Rappels sur la structure des chaînes de solides . . . 4
- 1.3 Exemple d'application . . . 5

2 Liaisons équivalentes **6**
- 2.1 Cas des liaisons séries . . . 6
- 2.2 Cas des liaisons parallèles . . . 9
- 2.3 Bilan . . . 13

3 Degré de mobilité m d'un mécanisme **14**
- 3.1 Calcul du degré de mobilité . . . 15
- 3.2 Mobilités utiles et mobilités internes . . . 22
- 3.3 Cas particulier des chaînes ouvertes . . . 23

4 Degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme **24**
- 4.1 Calcul du degré d'hyperstatisme . . . 25
- 4.2 Influence du degré d'hyperstatisme sur la technologie . . . 27

5 Formulation globale **29**
- 5.1 Relation fondamentale . . . 29
- 5.2 Détermination pratique . . . 31

Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin

— Version du 19 février 2025 —

1 Introduction

1.1 Hypothèses d'étude et notations

La théorie des mécanismes ne traite que de modèles avec des liaisons parfaites, sans frottement (ne dissipant pas d'énergie), sans jeux et indéformables. Chaque liaison pourra donc être définie par un torseur cinématique ou un torseur d'actions mécaniques transmissibles. Le torseur cinématique d'une liaison $\mathscr{L}_{12}$ entre deux classes d'équivalence 1 et 2 sera noté :

$$\left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\} = \begin{Bmatrix} p_{21}\ \overrightarrow{x} + q_{21}\ \overrightarrow{y} + r_{21}\ \overrightarrow{z} \\ u_{21}\ \overrightarrow{x} + v_{21}\ \overrightarrow{y} + w_{21}\ \overrightarrow{z} \end{Bmatrix}_A$$

L'espace des torseurs a une structure d'espace vectoriel de dimension 6 avec des opérations d'addition et de multiplication (par un scalaire et co-moment) bien définies. On note $\mathcal{V}_{12}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\}$ dont la dimension est égale au nombre de degrés de liberté de la liaison et vérifie $\dim(\mathcal{V}_{12}) \leqslant 5$ (6 si aucune liaison). Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la même liaison sera noté :

$$\{\mathscr{T}_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12}\ \overrightarrow{x} + Y_{12}\ \overrightarrow{y} + Z_{12}\ \overrightarrow{z} \\ L_{12}\ \overrightarrow{x} + M_{12}\ \overrightarrow{y} + N_{12}\ \overrightarrow{z} \end{Bmatrix}_A$$

On note $\mathcal{T}_{12}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{\mathscr{T}_{1\to 2}\}$ dont la dimension est égale au nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par la liaison et vérifie $\dim(\mathcal{T}_{12}) \leqslant 5$ (6 si encastrement). Dans une liaison parfaite entre deux classes d'équivalence 1 et 2, aucune énergie n'est dissipée pendant le fonctionnement. La puissance développée par les actions mécaniques de liaison entre ces deux classes d'équivalence 1 et 2 est nulle. Cette puissance, appelée puissance des inter-efforts de liaison, est notée :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \{\mathscr{T}_{1\to 2}\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\} = X_{12}u_{21} + Y_{12}v_{21} + Z_{12}w_{21} + L_{12}p_{21} + M_{12}q_{21} + N_{12}r_{21} = 0$$

Le co-moment des deux torseurs est un invariant scalaire, par définition indépendant du point de réduction. Il définit un produit scalaire, nul si les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{V}_{12}$ et $\mathcal{T}_{12}$ sont orthogonaux ; ce qui se traduit par la relation :

$$\dim(\mathcal{V}_{12}) + \dim(\mathcal{T}_{12}) = 6$$

qui caractérise la notion de dualité entre les torseurs cinématiques et des actions mécaniques transmissibles par une liaison $\mathscr{L}_{12}$. On qualifie le sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_{12}$ (resp. $\mathcal{V}_{12}$) de dual-orthogonal à $\mathcal{V}_{12}$ (resp. $\mathcal{T}_{12}$). On notera toutefois que cette relation sur les dimensions n'implique pas que l'un soit le supplémentaire de l'autre et ces deux sous-espaces vectoriels peuvent avoir des parties communes. De façon pratique, on retiendra que si une liaison possède m degrés de liberté alors elle possédera $6 - m$ inconnues d'actions mécaniques transmissibles.

1.2 Rappels sur la structure des chaînes de solides

Lors de l'étude d'un mécanisme, on commence par définir les classes d'équivalence, c'est-à-dire les ensembles de solides n'ayant aucun mouvement relatif, puis on recherche les liaisons entre ces classes d'équivalence. On formalise ensuite l'ensemble des informations sous forme de graphe de structure où chaque classe d'équivalence est représentée par un sommet du graphe et chaque arc entre les sommets représente une liaison entre ces classes.

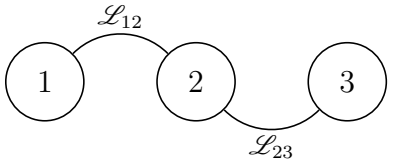
On rappelle que le nombre cyclomatique γ caractérise la complexité du graphe de structure d'un mécanisme et représente le nombre de cycles indépendants du graphe. On le définit par :

$$\gamma = L - S + 1$$

avec :

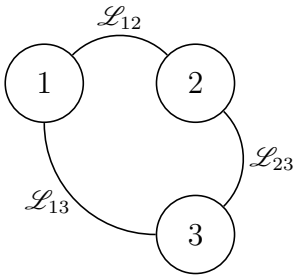
- S le nombre de solides (ou classes d'équivalence) y compris le bâti (nœuds du graphe) ;
- L le nombre de liaisons (arcs du graphe).

1.2.1 Chaîne ouverte



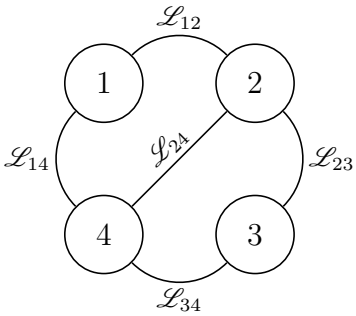
Un mécanisme sans cycle a un nombre cyclomatique nul : $\gamma = 0$. Ce genre de graphe est typique de la robotique. On peut avoir un déplacement maximal en fin de chaîne avec un minimum de liaisons.

1.2.2 Chaîne fermée



Dans ce type de structure, les liaisons permettent de relier l'ensemble des classes d'équivalence en un seul cycle fermé : $\gamma = 1$. Les paramètres des liaisons du système ne sont pas indépendants. On peut alors écrire deux équations vectorielles de fermeture cinématique : une linéaire et une angulaire.

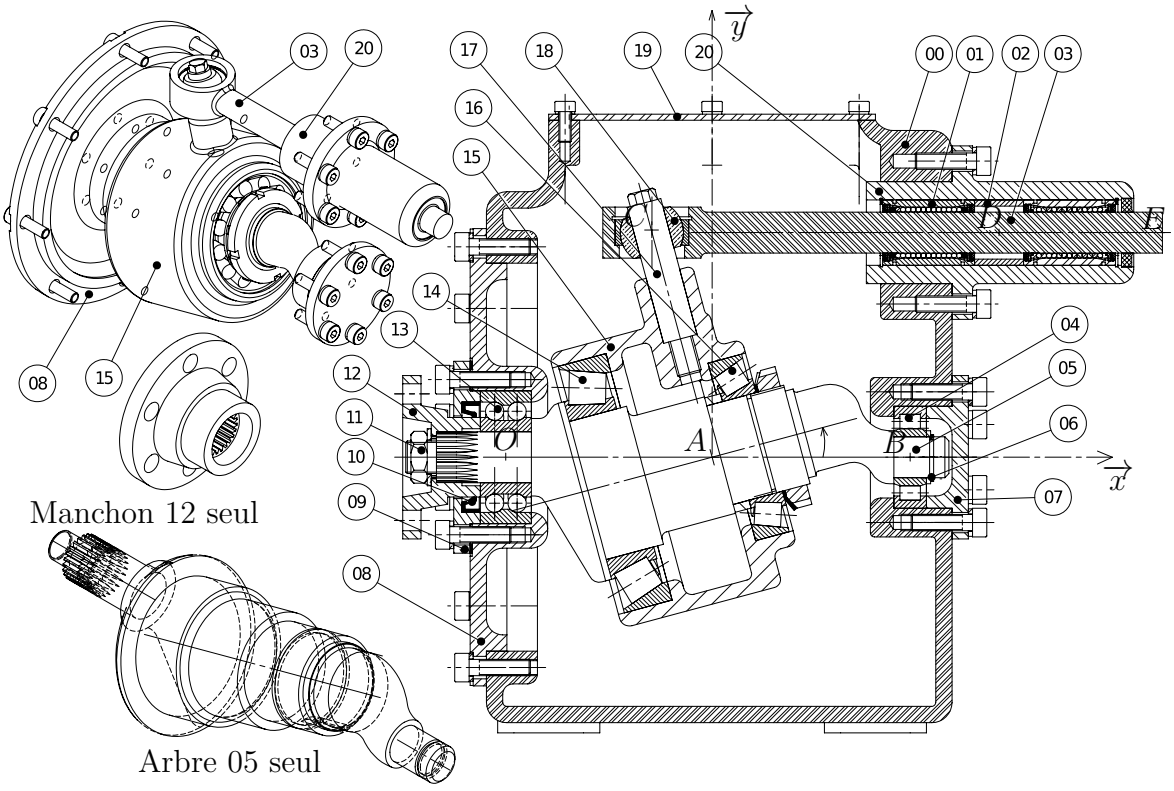
1.2.3 Chaîne complexe



Dans la pratique, les systèmes sont souvent basés sur des chaînes complexes. On peut alors faire apparaître plusieurs cycles fermés : $\gamma > 1$. Dans l'exemple ci-contre on a 3 cycles, mais il suffit d'en parcourir 2 pour être passé par tous les solides et toutes les liaisons, donc seuls $\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$ cycles sont indépendants. On peut alors écrire 2γ équations de fermeture cinématique conduisant à 6γ équations scalaires.

1.3 Exemple d'application

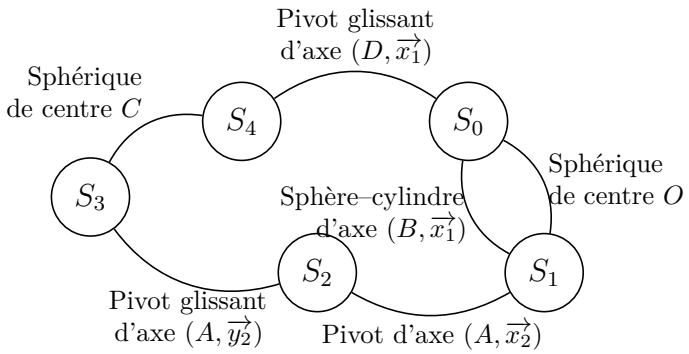
Exemple 1.1 (Système d'encapsulation)
Tout le cours sera illustré avec le système d'encapsulation suivant :



Une rotation continue de l'arbre d'entrée 05 provoque une translation alternative de l'arbre de sortie 03. On définit les classes d'équivalence suivante :

- le bâti : $S_0 = \{00; 01; 02; 08; 19; 20; \ldots\}$
- l'arbre d'entrée : $S_1 = \{05; 12\}$
- la pièce intermédiaire : $S_2 = \{15; 17\}$
- la rotule : $S_3 = \{18\}$
- l'arbre de sortie : $S_4 = \{03\}$

Le graphe de structure issu d'une étude architecturale du dessin d'ensemble donne :



2 Liaisons équivalentes

Pour analyser le comportement d'un système, on peut être amené à déterminer la liaison équivalente à un ensemble de liaisons en série ou en parallèle entre deux classes d'équivalences.

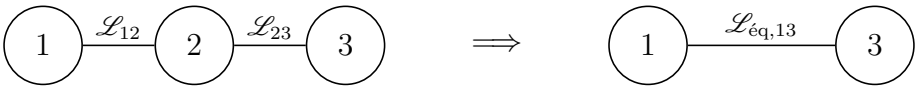
Définition 2.1 (Liaison équivalente)
Une liaison $\mathscr{L}_{\text{éq}}$ sera dite équivalente à un ensemble de liaisons si :

- elle transmet les mêmes actions mécaniques que les liaisons du modèle initial ;
- elle transmet les mêmes mouvements que les liaisons du modèle initial ;
- elle a le même bilan énergétique que les liaisons du modèle initial.

Pour déterminer une liaison équivalente, on peut rechercher soit le torseur cinématique équivalent (approche cinématique), soit le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente (approche statique).

2.1 Cas des liaisons séries

On cherche dans cette partie à déterminer la liaison équivalente $\mathscr{L}_{\text{éq},13}$ à l'ensemble des deux liaisons en série $\{\mathscr{L}_{12} \cup \mathscr{L}_{23}\}$ entre les classes d'équivalence 1 et 3.



2.1.1 Approche cinématique

La nature de la liaison équivalente entre 1 et 3 va être déduite de la forme du torseur cinématique $\{\mathscr{V}_{13}\}$. Or la composition des mouvements peut s'écrire :

$$\{\mathscr{V}_{\text{éq},13}\} = \{\mathscr{V}_{12}\} + \{\mathscr{V}_{23}\}$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente à deux liaisons en série est donc égal à la somme des deux torseurs (forcément réduits au même point). De manière générale, pour n liaisons en série, on écrira :

$$\left\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mathscr{V}_{i/(i-1)}\right\}$$

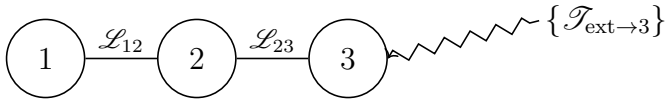
D'un point de vue mathématique, cette condition impose que le sous-espace vectoriel réel engendré par le torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\right\}$ de la liaison équivalente $\mathscr{L}_{\text{éq},0n}$ soit la somme des n sous-espaces vectoriels engendrés par les torseurs cinématiques des n liaisons en série $\mathscr{L}_{i/(i-1)}$. La dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\left\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\right\}$ est égale au nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente, dont on sait, grâce à la formule de Grassmann, qu'elle vérifie :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{\text{éq},0n}) \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathcal{V}_{i/(i-1)})$$

où m_u et m sont respectivement le nombre de mobilités utiles et totales. Leur différence $m_i = m - m_u$ définit le nombre de mobilités internes de la chaîne de solides.

2.1.2 Approche statique

La nature de la liaison équivalente entre 1 et 3 va être déduite de la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles entre les solides 1 et 3. On suppose ici que des efforts extérieurs supplémentaires agissent sur le solide 3. Le graphe de structure devient alors :



1. On commence par isoler le solide 3. Le bilan des actions mécaniques extérieures donne :
   - action transmissible par la liaison $\mathscr{L}_{23}$: $\{\mathscr{T}_{2\to 3}\}$
   - action mécanique extérieure : $\{\mathscr{T}_{\text{ext}\to 3}\}$

   Le principe fondamental de la statique s'écrit alors :
   $$\{\mathscr{T}_{2\to 3}\} + \{\mathscr{T}_{\text{ext}\to 3}\} = \{0\} \tag{1}$$
2. On isole le système $\{2;3\}$. Le bilan des actions mécaniques extérieures donne :
   - action transmissible par la liaison $\mathscr{L}_{12}$: $\{\mathscr{T}_{1\to 2}\}$
   - action mécanique extérieure : $\{\mathscr{T}_{\text{ext}\to\to 3}\}$

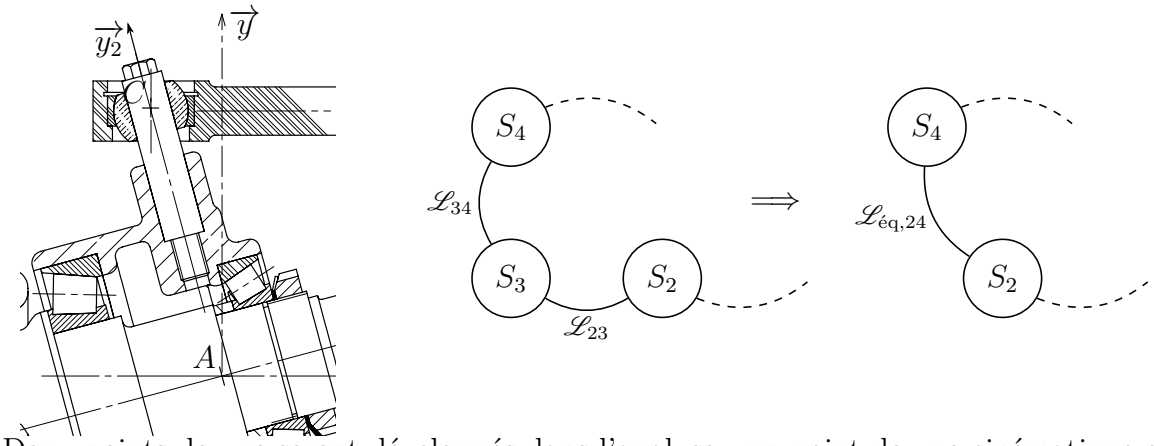
   Le principe fondamental de la statique appliqué au système $\{2;3\}$ s'écrit :
   $$\{\mathscr{T}_{1\to 2}\} + \{\mathscr{T}_{\text{ext}\to 3}\} = \{0\} \tag{2}$$
3. Le principe fondamental de la statique appliqué au solide 3 en considérant la liaison équivalente s'écrit :
   $$\{\mathscr{T}_{\text{éq},1\to 3}\} + \{\mathscr{T}_{\text{ext}\to 3}\} = \{0\} \tag{3}$$
   Par substitution entre les équations (1), (2) et (3), on obtient :
   $$\{\mathscr{T}_{\text{éq},1\to 3}\} = \{\mathscr{T}_{1\to 2}\} = \{\mathscr{T}_{2\to 3}\}$$

Finalement en isolant successivement chacun des solides de la chaîne ouverte, on en déduit que tous les torseurs des actions mécaniques transmissibles par les liaisons doivent être égaux et égaux à celui de la liaison équivalente. Cette condition s'interprète comme une compatibilité en effort et s'écrit pour n liaisons en série sous la forme générique :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \{\mathscr{T}_{\text{éq},0\to n}\} = \{\mathscr{T}_{(i-1)\to i}\}$$

Ces $6n$ conditions imposent que les composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles équivalent soient seulement celles qui peuvent être transmises simultanément par toutes les liaisons $\mathscr{L}_{i(i-1)}$.

Exemple 2.1 (Système d'encapsulation)
On s'intéresse dans cet exemple à une partie du mécanisme introduit dans la section 1.3. On cherche à déterminer la liaison équivalente à l'association en série des liaisons $\mathscr{L}_{23}$ et $\mathscr{L}_{34}$ qui sont respectivement une liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{y_2})$ et une liaison sphérique de centre C.



Deux points de vue seront développés dans l'analyse : un point de vue cinématique et un point de vue statique.

Point de vue cinématique
Par composition des mouvements, on peut écrire :

$$\{\mathscr{V}_{eq,2/4}\} = \{\mathscr{V}_{2/3}\} + \{\mathscr{V}_{3/4}\} \tag{4}$$

Or :

— $\mathscr{L}_{23}$ est une liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{y_2})$ donc :

$$\{\mathscr{V}_{2/3}\} = \left\{ \begin{array}{c} q_{23}\ \overrightarrow{y_2} \\ v_{23}\ \overrightarrow{y_2} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} q_{23}\ \overrightarrow{y_2} \\ v_{23}\ \overrightarrow{y_2} \end{array} \right\}_C \quad \text{car } C \in (A, \overrightarrow{y_2})$$

— $\mathscr{L}_{34}$ est une liaison sphérique de centre C donc :

$$\{\mathscr{V}_{3/4}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{34}} = p_{34}\ \overrightarrow{x_2} + q_{34}\ \overrightarrow{y_2} + r_{34}\ \overrightarrow{z_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_C$$

Finalement, en exploitant l'équation (4) au point C on trouve :

$$\{\mathscr{V}_{\text{éq},2/4}\} = \left\{ \begin{array}{c} p_{34}\ \overrightarrow{x_2} + (q_{34} + q_{23})\ \overrightarrow{y_2} + r_{34}\ \overrightarrow{z_2} \\ v_{23}\ \overrightarrow{y_2} \end{array} \right\}_C$$

On reconnaît la forme du torseur cinématique d'une liaison sphère–cylindre de centre C et d'axe $(C, \overrightarrow{y_2})$. On notera que l'ensemble des deux liaisons possède une mobilité interne en rotation autour de l'axe $(C, \overrightarrow{y_2})$ indiquée par la présence de deux inconnues pour définir une seule composante du torseur du torseur cinématique équivalent.

Point de vue statique
Par application de la démonstration de la page 7, on peut écrire :

$$\{\mathscr{T}_{eq,2\to4}\} = \{\mathscr{T}_{2\to3}\} = \{\mathscr{T}_{3\to4}\} \tag{5}$$

avec :

$$\{\mathscr{T}_{2\to3}\} = {}_{C}\left\{\begin{array}{c} X_{23}\,\overrightarrow{x_2} + Z_{23}\,\overrightarrow{z_2} \\ L_{23}\,\overrightarrow{x_2} + N_{23}\,\overrightarrow{z_2} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \{\mathscr{T}_{3\to4}\} = {}_{C}\left\{\begin{array}{c} X_{34}\,\overrightarrow{x_2} + Y_{34}\,\overrightarrow{y_2} + Z_{34}\,\overrightarrow{z_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

En postulant que, *a priori*, le torseur des actions mécaniques de la liaison équivalente est complet, on peut écrire :

$$\{\mathscr{T}_{\text{éq},2\to4}\} = {}_{C}\left\{\begin{array}{c} X_{24}\,\overrightarrow{x_2} + Y_{24}\,\overrightarrow{y_2} + Z_{24}\,\overrightarrow{z_2} \\ L_{24}\,\overrightarrow{x_2} + M_{24}\,\overrightarrow{y_2} + N_{24}\,\overrightarrow{z_2} \end{array}\right\}$$

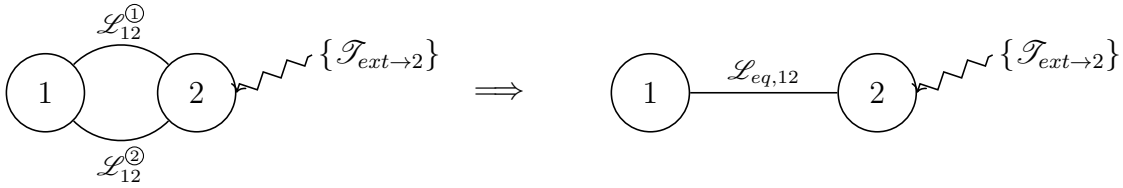
L'exploitation de l'équation (5) au point C donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} X_{24} & = & X_{23} & = & X_{34} \\ Y_{24} & = & 0 & = & Y_{34} \\ Z_{24} & = & Z_{23} & = & Z_{34} \\ L_{24} & = & L_{23} & = & 0 \\ M_{24} & = & 0 & = & 0 \\ N_{24} & = & N_{23} & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \{\mathscr{T}_{\text{éq},2\to4}\} = {}_{C}\left\{\begin{array}{c} X_{24}\,\overrightarrow{x_2} + Z_{24}\,\overrightarrow{z_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

On reconnaît là encore le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison sphère–cylindre de centre C d'axe $(C, \overrightarrow{y_2}) = (A, \overrightarrow{y_2})$.

2.2 Cas des liaisons parallèles

On cherche dans cette partie à déterminer la liaison équivalente $\mathscr{L}_{eq,12}$ à l'ensemble des deux liaisons en parallèle $\{\mathscr{L}_{12}^{①} \cup \mathscr{L}_{12}^{②}\}$ entre les classes d'équivalence 1 et 2.



Le torseur $\{\mathscr{T}_{ext\to2}\}$ modélise les actions mécaniques extérieures exercées sur le solide 2.

Remarque 2.1 (Notation des liaisons en parallèle)
Pour éviter toute confusion, chaque torseur associé à une des n liaisons en parallèle entre deux classes d'équivalence 1 et 2 est noté avec un exposant du type $^{ⓘ}$ ($i \in [\![1; n]\!]$), encerclé pour ne pas le confondre avec une puissance.

2.2.1 Approche statique

On isole le solide 2. Il est soumis à l'action mécanique extérieure et aux deux actions de liaisons avec le solide 1. L'équilibre du système se traduit par :

$$\{\mathscr{T}_{1\to 2}^{①}\} + \{\mathscr{T}_{1\to 2}^{②}\} + \{\mathscr{T}_{ext\to 2}\} = \{0\}$$

En exploitant l'équilibre du solide 2 basé sur le graphe de structure avec la liaison équivalente, on trouve :

$$\{\mathscr{T}_{\text{eq},1\to 2}\} + \{\mathscr{T}_{ext\to 2}\} = \{0\}$$

En exploitant les deux relations précédentes, on démontre que :

$$\{\mathscr{T}_{\text{eq},1\to 2}\} = \{\mathscr{T}_{1\to 2}^{①}\} + \{\mathscr{T}_{1\to 2}^{②}\}$$

Sans perte de généralité, on peut conclure sur le cas de n liaisons en parallèle entre les classes d'équivalence 1 et 2. L'approche statique permet de calculer le torseur des actions mécaniques de la liaison équivalente aux n liaisons en parallèle :

$$\{\mathscr{T}_{\text{éq},1\to 2}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathscr{T}_{1\to 2}^{ⓘ}\}$$

D'un point de vue mathématique, cette condition impose que le sous-espace vectoriel réel engendré par le torseur des actions mécaniques transmissibles $\{\mathscr{T}_{\text{éq},1\to 2}\}$ de la liaison équivalente $\mathscr{L}_{\text{éq},01}$ soit la somme des n sous-espaces vectoriels engendrés par les torseurs des actions mécaniques transmissibles des n liaisons en parallèle $\mathscr{L}_{01}^{ⓘ}$. La différence entre la dimension de la somme directe des sous-espaces vectoriels engendrés par chacune des liaisons et la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\{\mathscr{T}_{\text{éq},01}\}$ définit le degré d'hyperstatisme de la liaison :

$$h = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathcal{T}_{01}^{ⓘ}) - \dim(\mathcal{T}_{\text{éq},01})$$

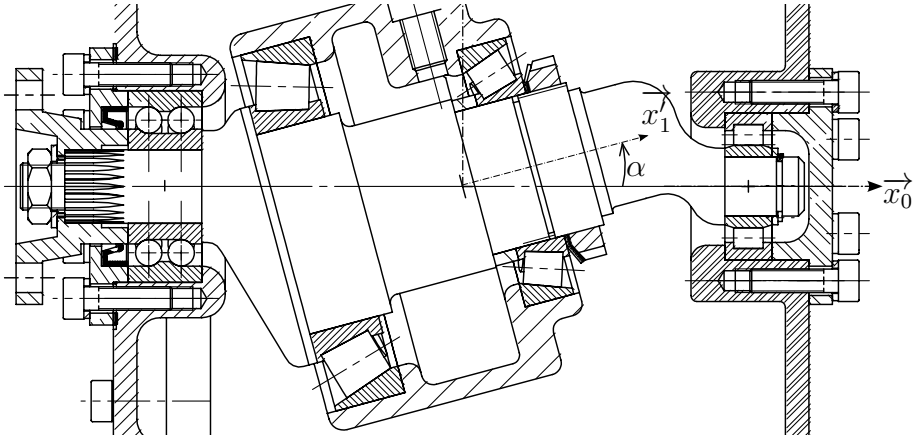
Ce degré correspond au nombre d'inconnues de liaison qui ne peuvent pas être déterminées par une simple étude statique.

2.2.2 Approche cinématique

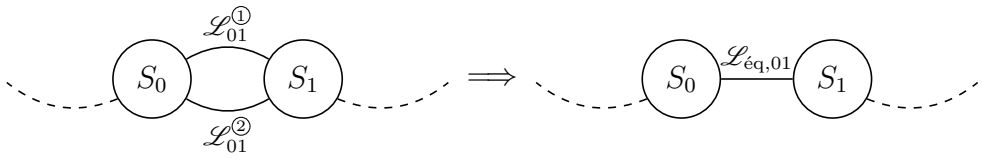
D'un point de vue cinématique, les mobilités de la liaison équivalente doivent être compatibles avec toutes les mobilités des liaisons élémentaires. Cela se traduit pour n liaisons en parallèle par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \{\mathscr{V}_{\text{éq},2/1}\} = \{\mathscr{V}_{2/1}^{ⓘ}\}$$

> **Exemple 2.2 (Système d'encapsulation)**
> On reprend l'exemple du système d'encapsulation introduit à la section 1.3. On va ici justifier le modèle cinématique minimal entre l'arbre de sortie et le carter du moteur.



On recherche donc la liaison équivalente à l'association en parallèle d'une liaison sphérique et d'une liaison sphère cylindre.



Deux points de vue seront développés dans l'analyse : un point de vue cinématique et un point de vue statique.

Point de vue statique

On isole S_1. Le bilan des actions mécaniques extérieures agissant sur ce système se résume à :

- l'action du bâti S_0 transmissible par les liaisons $\mathscr{L}_{01}^{①}$ et $\mathscr{L}_{01}^{②}$ ou $\mathscr{L}_{\text{éq},01}$;
- l'action du couple moteur $\{\mathscr{T}_{\text{mot}\to 1}\}$;
- l'action transmissible par la liaison $\mathscr{L}_{21}$ avec le solide S_2.

L'équilibre de ce système s'écrit :

$$\{\mathscr{T}_{\text{mot}\to 1}\} + \{\mathscr{T}_{2\to 1}\} + \{\mathscr{T}_{0\to 1}^{①}\} + \{\mathscr{T}_{0\to 1}^{②}\} = \{0\} \tag{6}$$

L'équilibre de S_1 en tenant compte de la liaison équivalente s'écrit :

$$\{\mathscr{T}_{\text{mot}\to 1}\} + \{\mathscr{T}_{2\to 1}\} + \{\mathscr{T}_{\text{éq},0\to 1}\} = \{0\} \tag{7}$$

Par substitution entre les équations (6) et (7), on trouve :

$$\{\mathscr{T}_{\text{éq},0\to 1}\} = \{\mathscr{T}_{0\to 1}^{①}\} + \{\mathscr{T}_{0\to 1}^{②}\} \tag{8}$$

Les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons $\mathscr{L}_{01}^{①}$ et $\mathscr{L}_{01}^{②}$ s'écrivent respectivement :

— liaison sphérique de centre O :

$$\{\mathscr{T}^{①}_{0\to1}\} = \left\{ \begin{array}{c} X^{①}_{01}\ \overrightarrow{x_0} + Y^{①}_{01}\ \overrightarrow{y_0} + Z^{①}_{01}\ \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

— liaison sphère–cylindre de centre B et d'axe $(B, \overrightarrow{x_0})$, avec $\overrightarrow{OB} = \ell\ \overrightarrow{x_0}$:

$$\{\mathscr{T}^{②}_{0\to1}\} = \left\{ \begin{array}{c} Y^{②}_{01}\ \overrightarrow{y_0} + Z^{②}_{01}\ \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} Y^{②}_{01}\ \overrightarrow{y_0} + Z^{②}_{01}\ \overrightarrow{z_0} \\ -\ell\ Z^{②}_{01}\ \overrightarrow{y_0} + \ell\ Y^{②}_{01}\ \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_O$$

Finalement l'exploitation de l'équation (8) donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{eq,01} & = & X^{①}_{01} \\ Y_{eq,01} & = & Y^{①}_{01} + Y^{②}_{01} \\ Z_{eq,01} & = & Z^{①}_{01} + Z^{②}_{01} \\ L_{eq,01} & = & 0 \\ M_{eq,01} & = & -\ell\ Z^{②}_{01} \\ N_{eq,01} & = & \ell\ Y^{②}_{01} \end{array} \right.$$

Toutes les composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles équivalent, sauf celle de moment autour de l'axe $(O, \overrightarrow{x_0})$, sont non nulles. On reconnaît donc le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{x_0})$. La liaison équivalente $\mathscr{L}_{\text{éq},01}$ est donc une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{x_0})$.

Point de vue cinématique

Pour déterminer la forme du torseur cinématique de la liaison équivalente, on part de la définition du point de vue cinématique :

$$\{\mathscr{V}_{\text{éq},1/0}\} = \{\mathscr{V}^{①}_{1/0}\} = \{\mathscr{V}^{②}_{1/0}\} \tag{9}$$

Les torseurs cinématiques des liaisons $\mathscr{L}^{①}_{01}$ et $\mathscr{L}^{②}_{01}$ s'écrivent respectivement :

— liaison sphérique de centre O :

$$\{\mathscr{V}^{①}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} p^{①}_{10}\ \overrightarrow{x_0} + q^{①}_{10}\ \overrightarrow{y_0} + r^{①}_{10}\ \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

— liaison sphère cylindre de centre B et d'axe $(B, \overrightarrow{x_0})$, avec $\overrightarrow{OB} = \ell\ \overrightarrow{x_0}$:

$$\{\mathscr{V}^{②}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} p^{②}_{10}\ \overrightarrow{x_0} + q^{②}_{10}\ \overrightarrow{y_0} + r^{②}_{10}\ \overrightarrow{z_0} \\ u^{②}_{10}\ \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} p^{②}_{10}\ \overrightarrow{x_0} + q^{②}_{10}\ \overrightarrow{y_0} + r^{②}_{10}\ \overrightarrow{z_0} \\ u^{②}_{10}\ \overrightarrow{x_0} - \ell\ r^{②}_{10}\ \overrightarrow{y_0} + \ell\ q^{②}_{10}\ \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_O$$

L'équation (9) s'exploite de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcccl} p_{eq,10} & = & p_{10}^{①} & = & p_{10}^{②} \\ q_{eq,10} & = & q_{10}^{①} & = & q_{10}^{②} \\ r_{eq,10} & = & r_{10}^{①} & = & r_{10}^{②} \\ u_{eq,10} & = & 0 & = & u_{10}^{②} \\ v_{eq,10} & = & 0 & = & -\ell\, r_{10}^{②} \\ w_{eq,10} & = & 0 & = & \ell\, q_{10}^{②} \end{array}\right.$$

Des deux dernières équations du système, on déduit que $r_{1/0}^{②} = q_{1/0}^{②} = 0$, impliquant $r_{1/0}^{①} = q_{1/0}^{①} = 0$. En tenant compte de la condition $u_{10}^{②} = 0$, il vient le torseur cinématique de la liaison équivalente :

$$\{\mathscr{V}_{eq,1/0}\} = \left\{\begin{array}{c} p_{10}\ \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_O \qquad \text{avec} \qquad p_{10} = p_{10}^{①} = p_{10}^{②}$$

On reconnaît la forme du torseur cinématique d'une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{x_0})$. La liaison équivalente $\mathscr{L}_{eq,01}$ est donc une liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{x_0})$.

2.3 Bilan

On résume dans la table 1 les méthodes pour déterminer les liaisons équivalentes à n liaisons en série ou en parallèle.

TABLE 1 – Méthodes de détermination des liaisons équivalentes.

	Liaisons en série	Liaisons en parallèle
Approche cinématique	$\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathscr{V}_{i/(i-1)}\}$	$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \{\mathscr{V}_{\text{éq},1/0}\} = \{\mathscr{V}_{1/0}^{ⓘ}\}$
Approche statique	$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \{\mathscr{T}_{\text{éq},0\to n}\} = \{\mathscr{T}_{(i-1)\to i}\}$	$\{\mathscr{T}_{\text{éq},0\to 1}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathscr{T}_{0\to 1}^{ⓘ}\}$

Pour déterminer la liaison équivalente à n liaisons en série, le plus simple est de calculer la somme des torseurs cinématiques de chaque liaison (réduits au même point). La condition de compatibilité doit se traduire par l'égalité des torseurs des actions mécaniques transmissibles par toutes les liaisons.

De façon analogue, pour déterminer la liaison équivalente à n liaisons en parallèle, le plus simple est de calculer la somme des torseurs des actions mécaniques transmissibles par chaque liaison (réduits au même point). La condition de compatibilité doit se traduire par l'égalité des torseurs cinématiques de toutes les liaisons.

Remarque 2.2 (Choix d'une méthode)
Si le sujet vous laisse le choix, il parait plus « naturel » d'utiliser une approche cinématique pour déterminer la liaison équivalente à un ensemble de liaisons en série et une approche statique dans le cas de liaisons en parallèle.

Remarque 2.3 (Liaisons équivalentes et schéma cinématique minimal)
Un schéma cinématique composé de liaisons équivalentes est un schéma cinématique minimal. Ce schéma permet une étude cinématique complète mais est insuffisant pour une étude statique car la simplification des liaisons par une liaison équivalente a pour conséquence une perte d'informations.

3 Degré de mobilité m d'un mécanisme

On considère un mécanisme décrit par un graphe de structure comportant γ cycles indépendants. Chaque liaison du mécanisme comporte $n_i \leqslant 5$ inconnues cinématiques (degrés de liberté) et on note I_C le nombre d'inconnues cinématiques total. Pour chaque cycle indépendant, il est possible d'écrire une relation torsorielle de fermeture cinématique, conduisant à six équations scalaires. Une fois ces équations écrites pour tous les cycles indépendants, on obtient un système homogène de $E_C = 6\gamma$ équations linéaires à I_C inconnues. On note r_C le rang de ce système qui correspond au nombre d'équations indépendantes. On appelle *degré de mobilité d'un mécanisme* le nombre d'inconnues cinématiques que l'on ne peut pas déterminer lors de la résolution de ce système.

Définition 3.1 (Degré de mobilité)
Le degré de mobilité d'un mécanisme correspond au nombre entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m = I_C - r_C$$

avec :

- I_C le nombre d'inconnues cinématiques d'un mécanisme ;
- r_C le rang du système de $E_C = 6\gamma$ équations issu de l'étude cinématique du mécanisme (fermeture cinématique).

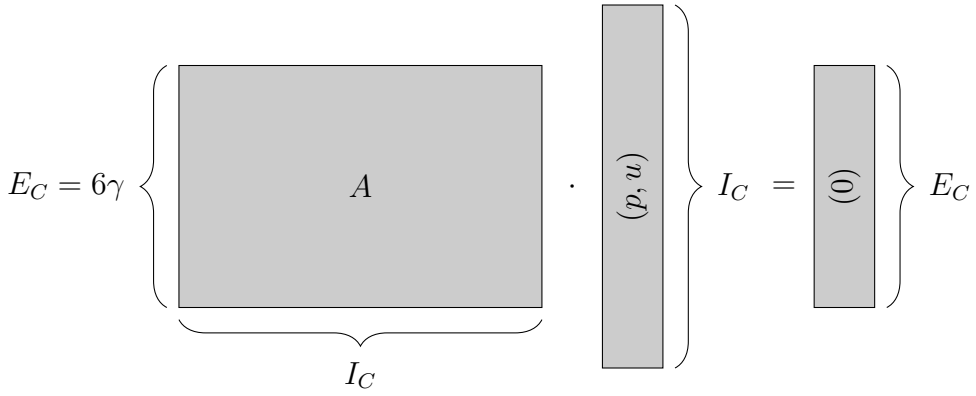
Le degré de mobilité d'un mécanisme vérifie toujours $m \geqslant I_C - E_C$.

Le degré de mobilité m d'un mécanisme correspond au nombre de paramètres cinématiques à imposer afin d'obtenir une solution unique pour le système de $E_C = 6\gamma$ équations linéaires. Si $m = 0$, le mécanisme est dit *immobile*. Sinon, le mécanisme possède m mobilités. Dans ce cas, il est possible d'exprimer r_C inconnues cinématiques en fonction de m paramètres.

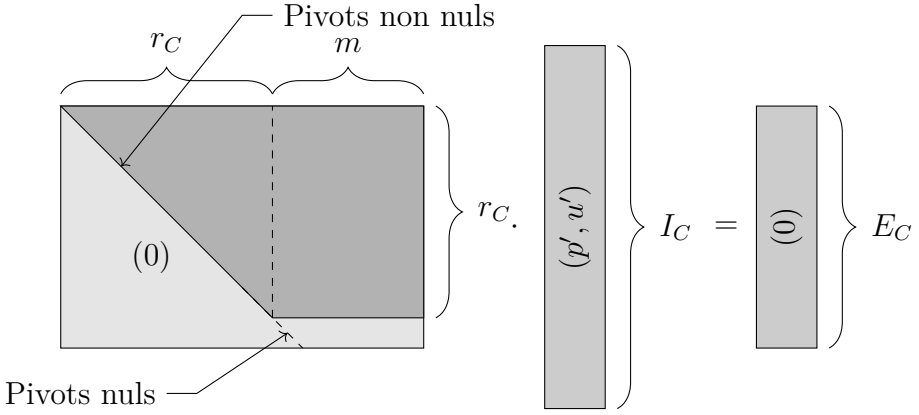
3.1 Calcul du degré de mobilité

Pour calculer le degré de mobilité m d'un mécanisme constitué de γ cycles indépendants, il faut successivement :

1. effectuer γ fermetures cinématiques et écrire les 6γ équations scalaires faisant intervenir les I_C inconnues cinématiques ;
2. mettre ces équations sous la forme d'un système linéaire :



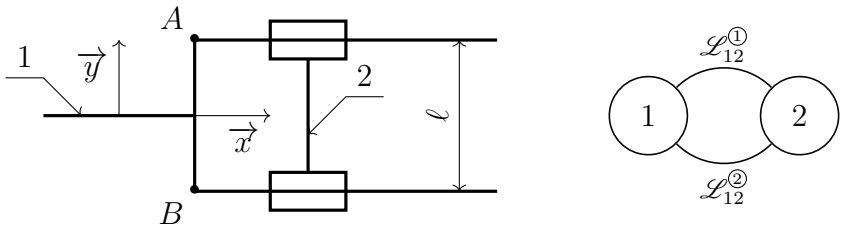
   où la matrice A, de taille $6\gamma \times I_C$, multiplie un vecteur regroupant les I_C inconnues cinématiques ;
3. mettre ce système linéaire sous forme échelonnée par lignes en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan [1] :



   Le nombre de colonnes de A ne contenant pas de pivot (pivot nul) correspond au nombre d'inconnues du système qui jouent le rôle de paramètres en fonction desquels on pourra résoudre le système : ce sont les mobilités m du mécanisme. Le nombre de colonnes contenant un pivot (non nul) est égal au rang $r_C = \mathrm{rg}(A)$ de la matrice A et correspondant au nombre d'inconnues cinématiques du système que l'on pourra expliciter en fonction des m paramètres.

1. Voir le cours de mathématiques.

Exemple 3.1 (Liaisons pivots glissant en parallèle)
Considérons deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles et non confondus ($\ell \neq 0$) en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 comme décrit ci-dessous.



Les torseurs cinématiques de ces deux liaisons s'écrivent respectivement :

$$\left\{\mathscr{V}_{2/1}^{①}\right\} = \begin{Bmatrix} p_{21}^{①}\ \overrightarrow{x} \\ u_{21}^{①}\ \overrightarrow{x} \end{Bmatrix}_A \qquad \text{et} \qquad \left\{\mathscr{V}_{2/1}^{②}\right\} = \begin{Bmatrix} p_{21}^{②}\ \overrightarrow{x} \\ u_{21}^{②}\ \overrightarrow{x} \end{Bmatrix}_B$$

en fonction de $I_C = 4$ inconnues cinématiques $p_{21}^{①}$, $u_{21}^{①}$, $p_{21}^{②}$ et $u_{21}^{②}$. Le graphe de structure montre que ces deux liaisons sont en parallèle et constituent un cycle. Il est donc possible de réaliser $\gamma = 1$ fermeture cinématique :

$$\left\{\mathscr{V}_{2/1}^{①}\right\} - \left\{\mathscr{V}_{2/1}^{②}\right\} = \{0\}$$

qui, une fois tous les torseurs réduits au même point A

$$\left\{\mathscr{V}_{2/1}^{②}\right\} = \begin{Bmatrix} p_{21}^{②}\ \overrightarrow{x} \\ u_{21}^{②}\ \overrightarrow{x} + \ell\ p_{21}^{②}\ \overrightarrow{z} \end{Bmatrix}_A$$

avec $\overrightarrow{AB} = -\ell\,\overrightarrow{y}$, conduit au système d'équations linéaires :

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} p_{21}^{①} - p_{21}^{②} & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ u_{21}^{①} - u_{21}^{②} & = 0 \\ 0 & = 0 \\ \ell\ p_{21}^{②} & = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} p_{21}^{①} \\ p_{21}^{②} \\ u_{21}^{①} \\ u_{21}^{②} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le rang $r_C = \mathrm{rg}(A)$ de ce système linéaire, il suffit ici d'opérer les deux opérations successives $L_2 \leftrightarrow L_6$ et $L_3 \leftrightarrow L_4$ telles que le système devienne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'} \cdot \begin{pmatrix} p_{21}^{①} \\ p_{21}^{②} \\ u_{21}^{①} \\ u_{21}^{②} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient immédiatement le rang $r_C = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = 3$ de ce système linéaire correspondant au nombre de pivots (non nuls). On en déduit le degré de mobilité :

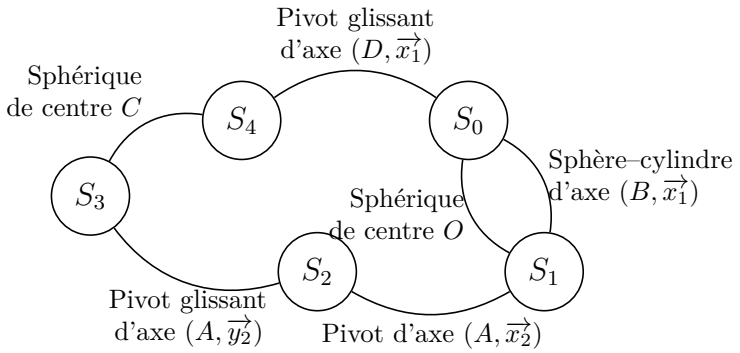
$$m = I_C - r_C = 4 - 3 = 1$$

On notera que si le calcul du rang permet de déterminer de degré de mobilité, il n'indique en aucun cas lesquelles. Pour le savoir, il est nécessaire de résoudre le système. En choisissant $u_{21}^{②}$ comme paramètre, il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{21}^{①} \\ p_{21}^{②} \\ u_{21}^{①} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{21}^{②} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} p_{21}^{①} = p_{21}^{②} = 0 & \text{si } \ell \neq 0 \\ p_{21}^{①} = p_{21}^{②} \in \mathbb{R} & \text{si } \ell = 0 \\ u_{21}^{①} = u_{21}^{②} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

qui signifie que le comportement cinématique de deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles et non confondus ($\ell \neq 0$) en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 est équivalent à celui d'une liaison glissière.

Exemple 3.2 (Système d'encapsulation)
Reprenons l'exemple du système d'encapsulation. Le graphe de liaison issu d'une étude architecturale du dessin d'ensemble donne :



On note :

$$\overrightarrow{OA} = a\ \overrightarrow{x_1}, \qquad \overrightarrow{AB} = b\ \overrightarrow{x_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \delta\ \overrightarrow{y_2}$$

Les torseurs cinématiques des six liaisons apparaissant sur le graphe de structure s'écrivent :

— liaison sphérique en O :

$$\left\{\mathscr{V}_{1/0}^{①}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} p_{10}^{①}\ \overrightarrow{x_1} + q_{10}^{①}\ \overrightarrow{y_1} + r_{10}^{①}\ \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_O$$

— liaison sphère–cylindre de centre B et d'axe $(B, \overrightarrow{x_1})$:

$$\left\{\mathscr{V}_{1/0}^{②}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} p_{1}^{②}\ \overrightarrow{x_1} + q_{10}^{②}\ \overrightarrow{y_1} + r_{10}^{②}\ \overrightarrow{z_1} \\ u_{10}^{②}\ \overrightarrow{x_1} \end{array} \right\}_B$$

— liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{x_2})$:

$$\left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\} = \left\{\begin{array}{c} p_{21}\ \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$$

— liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{y_2})$:

$$\left\{\mathscr{V}_{3/2}\right\} = \left\{\begin{array}{c} q_{32}\ \overrightarrow{y_2} \\ v_{32}\ \overrightarrow{y_2} \end{array}\right\}_A$$

— liaison sphérique en C :

$$\left\{\mathscr{V}_{4/3}\right\} = \left\{\begin{array}{c} p_{43}\ \overrightarrow{x_1} + q_{43}\ \overrightarrow{y_1} + r_{43}\ \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_C$$

— liaison pivot glissant d'axe $(D, \overrightarrow{x_0})$:

$$\left\{\mathscr{V}_{4/0}\right\} = \left\{\begin{array}{c} p_{40}\ \overrightarrow{x_1} \\ u_{40}\ \overrightarrow{x_1} \end{array}\right\}_C$$

et font apparaître $I_C = 15$ inconnues cinématiques. Le graphe de structure du système d'encapsulation comporte $\gamma = 2$ cycles indépendants. Il est donc possible de réaliser deux fermetures cinématiques :

$$\left\{\mathscr{V}^{①}_{1/0}\right\} - \left\{\mathscr{V}^{②}_{1/0}\right\} = \{0\}$$
$$\left\{\mathscr{V}_{4/3}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{3/2}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\} + \left\{\mathscr{V}^{①}_{1/0}\right\} - \left\{\mathscr{V}_{4/0}\right\} = \{0\}$$

Pour réaliser la première fermeture cinématique, le plus simple est de réduire les deux torseurs au point O. Avec l'expression de la vitesse :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V^{②}_{O,1/0}} &= \overrightarrow{V^{②}_{B,1/0}} + \overrightarrow{\Omega^{②}_{1/0}} \wedge \overrightarrow{BO} \\ &= u^{②}_{10}\ \overrightarrow{x_1} + \left(p^{②}_{10}\ \overrightarrow{x_1} + q^{②}_{10}\ \overrightarrow{y_1} + r^{②}_{10}\ \overrightarrow{z_1}\right) \wedge (-a-b)\ \overrightarrow{x_1} \\ &= u^{②}_{10}\ \overrightarrow{x_1} - r^{②}_{10}\ (a+b)\ \overrightarrow{y_1} + q^{②}_{10}\ (a+b)\ \overrightarrow{z_1}\end{aligned}$$

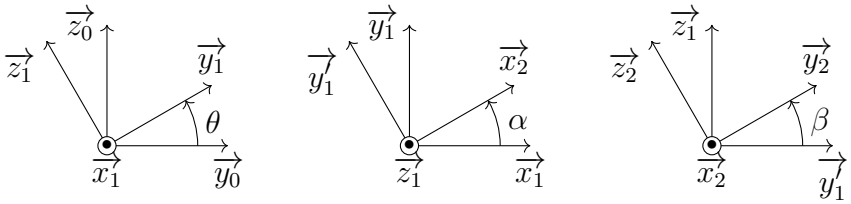
il vient immédiatement les six équations scalaires dans la base $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$:

$$\begin{aligned} 0 &= p^{①}_{10} - p^{②}_{10} \\ 0 &= q^{①}_{10} - q^{②}_{10} \\ 0 &= r^{①}_{10} - r^{②}_{10} \\ 0 &= -\ u^{②}_{10} \\ 0 &= r^{②}_{10}\ (a+b) \\ 0 &= -\ q^{②}_{10}\ (a+b) \end{aligned}$$

La deuxième fermeture cinématique peut être réalisée en réduisant tous les torseurs cinématiques au point C ; ce qui nécessite de calculer toutes les vitesses au point C.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{C,4/3}} &= \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{V_{C,3/2}} &= \overrightarrow{V_{A,3/2}} = v_{32}\ \overrightarrow{y_2} \text{ car } C \in (A, \overrightarrow{y_2}) \\
\overrightarrow{V_{C,2/1}} &= \overrightarrow{V_{A,2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AC} \\
&= p_{21}\ \overrightarrow{x_2} \wedge \delta\ \overrightarrow{y_2} \\
&= p_{21}\ \delta\ \overrightarrow{z_2} \\
\overrightarrow{V^{①}_{C,1/0}} &= \overrightarrow{V^{①}_{O,1/0}} + \overrightarrow{\Omega^{①}_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OC} \\
&= \left(p^{①}_{10}\ \overrightarrow{x_1} + q^{①}_{10}\ \overrightarrow{y_1} + r^{①}_{10}\ \overrightarrow{z_1}\right) \wedge (a\overrightarrow{x_1} + \delta\ \overrightarrow{y_2}) \\
&= p^{①}_{10}\ \delta\ (\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}) + q^{①}_{10}\ [\delta\ (\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_2}) - a\ \overrightarrow{z_1}] + r^{①}_{10}\ [\delta\ (\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_2}) + a\ \overrightarrow{y_1}] \\
\overrightarrow{V_{C,4/0}} &= u_{40}\ \overrightarrow{x_1}
\end{aligned}
$$

À ce stade, il est nécessaire de projeter dans une unique base orthonormée les deux équations vectorielles respectivement associées à la composition des taux de rotation et des vitesses du point C. Par lecture directe des figures géométrales



il vient dans la base $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x_2} &= \cos(\alpha)\ \overrightarrow{x_1} + \sin(\alpha)\ \overrightarrow{y_1} \\
\overrightarrow{y_2} &= \cos(\beta)\ \overrightarrow{y_1}' + \sin(\beta)\ \overrightarrow{z_1} = \cos(\beta)\ (\cos(\alpha)\ \overrightarrow{y_1} - \sin(\alpha)\ \overrightarrow{x_1}) + \sin(\beta)\ \overrightarrow{z_1} \\
\overrightarrow{z_2} &= \cos(\beta)\ \overrightarrow{z_1} - \sin(\beta)\ \overrightarrow{y_1}' = \cos(\beta)\ \overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\ (\sin(\alpha)\ \overrightarrow{x_1} - \cos(\alpha)\ \overrightarrow{y_1}) \\
\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2} &= \cos(\beta)\ \cos(\alpha)\ \overrightarrow{z_1} - \sin(\beta)\ \overrightarrow{y_1} \\
\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_2} &= \cos(\beta)\ \sin(\alpha)\ \overrightarrow{z_1} + \sin(\beta)\ \overrightarrow{x_1} \\
\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_2} &= -\cos(\beta)\,(\cos(\alpha)\ \overrightarrow{x_1} + \sin(\alpha)\ \overrightarrow{y_1})
\end{aligned}
$$

conduisant aux six équations scalaires dans la base $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$:

$$
\begin{aligned}
0 =& p_{43} - \cos(\beta)\sin(\alpha) q_{32} + \cos(\alpha) p_{21} + p^{①}_{10} - p_{40} \\
0 =& q_{43} + \cos(\beta)\cos(\alpha) q_{32} + \sin(\alpha) p_{21} + q^{①}_{10} \\
0 =& r_{43} + \sin(\beta) q_{32} + r^{①}_{10} \\
0 =& -\cos(\beta)\sin(\alpha) v_{32} + \delta\ \sin(\beta)\sin(\alpha) p_{21} + \delta\ \sin(\beta) q^{①}_{10} - \delta\ \cos(\beta)\cos(\alpha) r^{①}_{10} - u_{40} \\
0 =& \cos(\beta)\cos(\alpha) v_{32} - \delta\ \sin(\beta)\cos(\alpha) p_{21} - \delta\ \sin(\beta) p^{①}_{10} - \delta\ \cos(\beta)\sin(\alpha) r^{①}_{10} + a\ r^{①}_{10} \\
0 =& \sin(\beta) v_{32} + \delta\ \cos(\beta) p_{21} + \delta\ \cos(\beta)\cos(\alpha) p^{①}_{10} + \delta\ \cos(\beta)\sin(\alpha) q^{①}_{10} - a\ q^{①}_{10}
\end{aligned}
$$

Finalement, l'ensemble des deux fermetures cinématiques forme un système de douze équations linéaires à quinze inconnues que l'on peut mettre sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a+b) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -(a+b) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_\alpha & -C_\beta S_\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_\alpha & C_\beta C_\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_\beta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \delta\ S_\beta & -\delta C_\beta C_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta S_\beta S_\alpha & 0 & -C_\beta S_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-\delta S_\beta & 0 & a - \delta C_\beta S_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta S_\beta C_\alpha & 0 & C_\beta C_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\delta C_\beta C_\alpha & \delta C_\beta S_\alpha - a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta C_\beta & 0 & S_\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
p_{10}^{①} \\ q_{10}^{①} \\ r_{10}^{①} \\ p_{10}^{②} \\ q_{10}^{②} \\ r_{10}^{②} \\ u_{10}^{②} \\ p_{21} \\ q_{32} \\ v_{32} \\ p_{43} \\ q_{43} \\ r_{43} \\ p_{40} \\ u_{40}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}$$

où nous avons noté $S_i \equiv \sin(i)$ et $C_i \equiv \cos(i)$. Par simple arrangement des lignes et des colonnes de la matrice, il vient immédiatement :

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & C_\beta C_\alpha \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S_\beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C_\beta S_\alpha & \delta S_\beta S_\alpha & \delta S_\beta & -\delta C_\beta C_\alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & C_\alpha & 0 & 0 & 1 & 1 & -C_\beta S_\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_\beta C_\alpha & -\delta S_\beta C_\alpha & 0 & a - \delta C_\beta S_\alpha & -\delta S_\beta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_\beta & \delta C_\beta & \delta C_\beta S_\alpha - a & 0 & \delta C_\beta C_\alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a+b) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
u_{10}^{②} \\ p_{10}^{②} \\ q_{43} \\ r_{43} \\ u_{40} \\ p_{40} \\ r_{10}^{②} \\ q_{10}^{②} \\ v_{32} \\ p_{21} \\ q_{10}^{①} \\ r_{10}^{①} \\ p_{10}^{①} \\ p_{43} \\ q_{32}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}$$

En effectuant successivement les trois opérations :

$$L_{10} \leftarrow L_{10} - \frac{S_\beta}{C_\beta C_\alpha} \times L_9$$
$$L_{11} \leftarrow L_{11} - (a+b) \times L_8$$
$$L_{12} \leftarrow L_{12} - (a+b) \times L_7$$

il vient l'expression de la matrice équivalente :

$$A' = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & C_\beta C_\alpha \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S_\beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -C_\beta S_\alpha & \delta S_\beta S_\alpha & \delta S_\beta & -\delta C_\beta C_\alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & C_\alpha & 0 & 0 & 1 & 1 & -C_\beta S_\alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_\beta C_\alpha & -\delta S_\beta C_\alpha & 0 & a - \delta C_\beta S_\alpha & -\delta S_\beta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta C_\beta + \frac{\delta S_\beta^2}{C_\beta} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a+b) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a+b) & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

du système échelonné dont le rang est $r_C = \mathrm{rg}(A') = 12$. Le mécanisme comportant $I_C = 15$ inconnues cinématiques, son degré de mobilité est donc :

$$m = I_C - r_C = 15 - 12 = 3$$

Ce mécanisme possède donc trois mobilités.

3.2 Mobilités utiles et mobilités internes

Parmi les mobilités d'un mécanisme on distingue généralement :

— les mobilités utiles, notées m_u ;
— les mobilités internes, notées m_i.

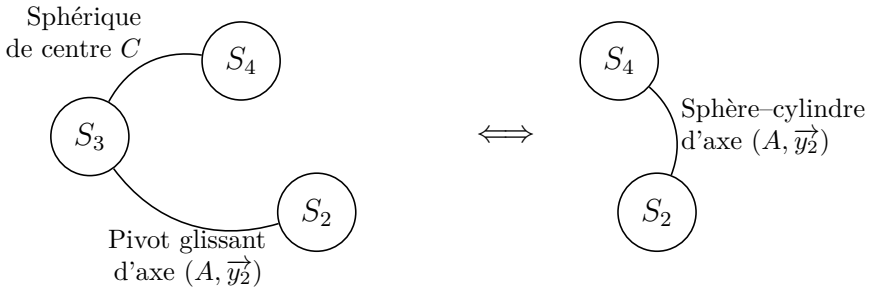
Les mobilités utiles correspondent au nombre de relations indépendantes entre les inconnues cinématiques d'entrée(s)/sortie(s) du mécanisme. Les mobilités internes correspondent au nombre de relations indépendantes entre les inconnues cinématiques des pièces internes au mécanisme. Ces mouvements sont indépendants du fonctionnement global du système. Le degré de mobilité (total) d'un mécanisme est défini par la somme $m = m_u + m_i$.

Dans le cas des mécanismes peu complexes, il est possible de déterminer le degré de mobilité à partir de l'analyse du mécanisme (lecture du dessin d'ensemble, schéma cinématique, vue 3D, etc.). On recherche les mobilités utiles :

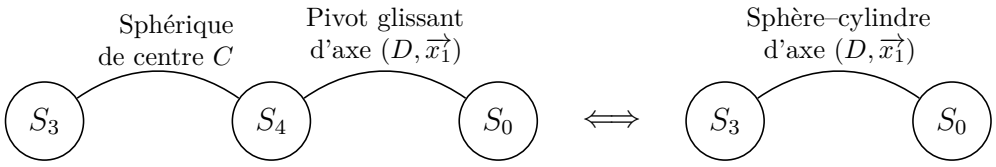
— en identifiant la chaîne cinématique de la (des) mobilité(s) utile(s) (de(s) l'actionneur(s) vers la sortie) ;
— en recherchant la chaîne cinématique de réglage.

Pour identifier les mobilités internes, on s'intéresse aux liaisons à plusieurs degrés de liberté (pivot glissant, sphère–cylindre, sphérique). Chaque mouvement ainsi identifié est une mobilité. Cette détermination intuitive est souvent suffisante pour résoudre un problème élémentaire.

Exemple 3.3 (Système d'encapsulation)
Reprenons l'exemple du système d'encapsulation. Le résultat précédent a conduit à un degré de mobilité $m = 3$. Parmi ces mobilités, une seule est utile et associée à la fonction du mécanisme. En effet, un moteur impose une rotation d'axe $(O, \overrightarrow{x})$ de 1 par rapport à 0 que le mécanisme convertit en translation alternative de direction $\overrightarrow{x}$ de 4 par rapport à 0. Les deux autres mobilités correspondent à des mobilités internes. Pour identifier la première, il suffit de rechercher une liaison équivalente au graphe partiel :



qui montre que la liaison équivalente à l'ensemble $\{\mathscr{L}_{23} \cup \mathscr{L}_{34}\}$ est une liaison sphère–cylindre d'axe $(A, \overrightarrow{y_2})$. Comme la liaison pivot $\mathscr{L}_{23}$ et la liaison sphérique $\mathscr{L}_{34}$ possèdent une mobilité en rotation autour de l'axe $(A, \overrightarrow{y_2}) = (C, \overrightarrow{y_2})$, alors l'ensemble des deux liaisons possède une mobilité interne en rotation autour de cet axe. Pour identifier la seconde mobilité interne, il s'agit de faire la même chose avec l'ensemble $\{\mathscr{L}_{23} \cup \mathscr{L}_{34}\}$ dont la liaison équivalente est là encore une liaison sphère–cylindre d'axe $(D, \overrightarrow{x_1})$.



Comme pour la première mobilité interne, on remarque que la liaison pivot $\mathscr{L}_{04}$ et la liaison sphérique $\mathscr{L}_{43}$ possèdent une mobilité en rotation autour de l'axe $(D, \overrightarrow{x_1}) = (C, \overrightarrow{x_1})$, donc que l'ensemble des deux liaisons possède une mobilité interne en rotation autour de cet axe.

3.3 Cas particulier des chaînes ouvertes

Dans le cas particulier des chaînes ouvertes, le degré de mobilité utile du mécanisme est égal au nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente, c'est-à-dire à la dimension du sous-espace vectoriel réel $\mathcal{V}_{\text{éq}}$ engendré par le torseur cinématique $\left\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\right\}$ de la liaison équivalente $\mathscr{L}_{\text{éq},0n}$:

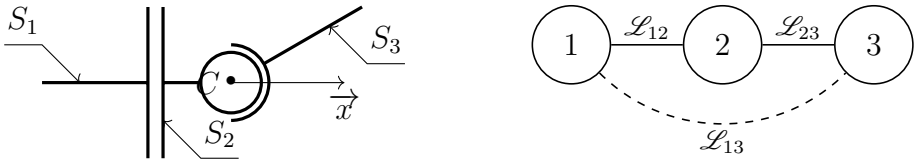
$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{\text{éq},0n})$$

Connaissant le degré de mobilité total, égal au nombre d'inconnues cinématiques associées aux n liaisons en série ou, de façon équivalente, à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la somme directe des n sous-espaces vectoriels respectivement engendrés par les torseurs cinématiques des n liaisons en série $\mathscr{L}_{i/(i-1)}$:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathcal{V}_{i/(i-1)})$$

il est possible d'en déduire le degré de mobilité interne $m_i = m - m_u$ d'une chaîne ouverte de solides.

Exemple 3.4 (Décomposition d'une liaison sphère-plan)
On considère une chaîne ouverte constituée de deux liaisons et trois solides. Le solide S_1 est liaison appui-plan de normale $(A, \overrightarrow{x})$ avec un solide S_2, lui-même en liaison sphérique de centre $C \in (A, \overrightarrow{x})$ avec un solide S_3.



Le torseur cinématique équivalent s'écrit :

$$\left\{\mathscr{V}_{3/1}\right\} = \left\{\mathscr{V}_{3/2}\right\} + \left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\} = {}_{C}\left\{\begin{array}{c} p_{32}\ \overrightarrow{x} + q_{32}\ \overrightarrow{y} + r_{32}\ \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\} + {}_{C}\left\{\begin{array}{c} p_{21}\ \overrightarrow{x} \\ v_{21}\ \overrightarrow{y} + w_{21}\ \overrightarrow{z} \end{array}\right\}$$
$$= {}_{C}\left\{\begin{array}{c} (p_{32}+p_{21})\ \overrightarrow{x} + q_{32}\ \overrightarrow{y} + r_{32}\ \overrightarrow{z} \\ v_{21}\ \overrightarrow{y} + w_{21}\ \overrightarrow{z} \end{array}\right\}$$

La liaison équivalente est donc une liaison sphère–plan de normale $(C, \overrightarrow{x})$. Cette liaison possède cinq degrés de liberté et sa mobilité utile est donc $m_u = 5$. On peut toutefois remarquer que les torseurs cinématiques possèdent, à eux deux, six inconnues cinématiques. L'inconnue « supplémentaire » de mobilité en rotation autour de l'axe $(C, \overrightarrow{x})$ correspond à une mobilité interne ($m_i = 1$). En effet, le solide S_2 peut tourner librement autour de l'axe $(C, \overrightarrow{x})$ par rapport aux solides S_1 ou S_3 sans affecter le comportement cinématique du solide S_3 par rapport au solide S_1.

4 Degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme

On considère un mécanisme décrit par un graphe de liaisons comportant S solides dont le bâti. Chaque liaison du mécanisme comporte $n_i \leqslant 5$ inconnues d'actions mécaniques transmissibles (6 si encastrement) et on note I_S le nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles (aussi dites « statiques ») total. En isolant chacun des solides (hors bâti), il est possible d'écrire une relation torsorielle correspondant à l'application du principe fondamental de la dynamique, conduisant à six équations scalaires. Une fois ces équations écrites pour tous les solides (hors bâti), on obtient un système homogène de $E_S = 6(S-1)$ équations linéaires à I_S inconnues. On note r_S le rang de ce système qui correspond au nombre d'équations indépendantes. On appelle *degré d'hyperstatisme d'un mécanisme* le nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons que l'on ne peut pas déterminer lors de la résolution de ce système.

Définition 4.1 (Degré d'hyperstatisme)
Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme correspond au nombre entier $h \in \mathbb{N}$ tel que :

$$h = I_S - r_S$$

avec :

- I_S le nombre d'inconnues d'actions transmissibles par les liaisons d'un mécanisme ;
- r_S le rang du système de $E_S = 6(S-1)$ équations issu de l'étude dynamique (ou statique) de chacun des $(S-1)$ solides (hors bâti).

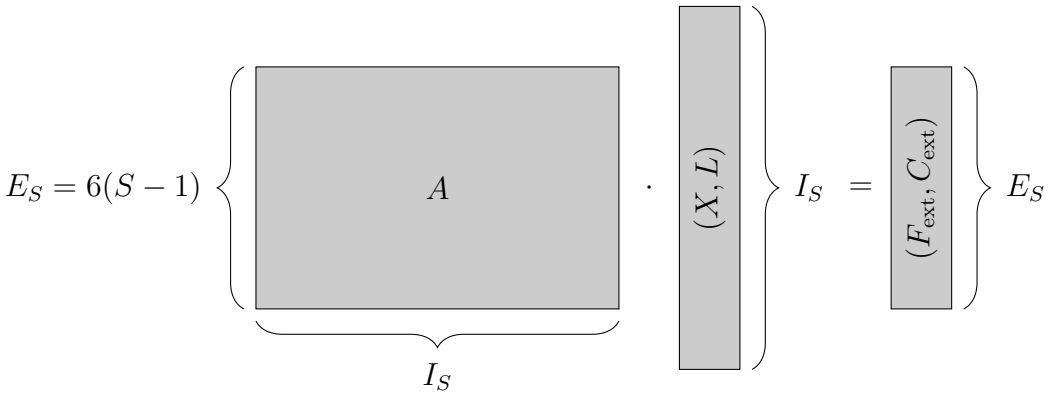
Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme vérifie toujours $h \geqslant I_S - E_S$.

Le degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme correspond au nombre d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons à imposer afin d'obtenir une solution unique pour le système de $E_S = 6(S-1)$ équations linéaires. Si $h = 0$, le mécanisme est dit *isostatique*. Dans ce cas, chaque inconnue de liaison peut être déterminée par étude dynamique (ou statique). Sinon, le mécanisme possède h inconnues hyperstatiques. Dans ce cas, il est possible d'exprimer r_S inconnues de liaison en fonction de h paramètres.

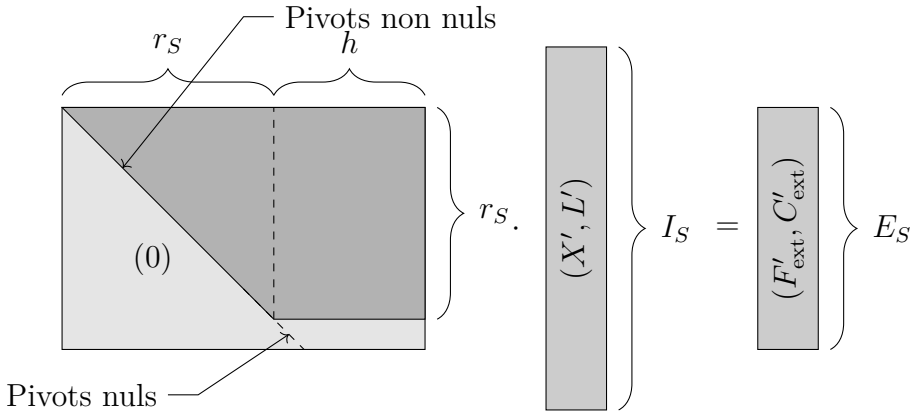
4.1 Calcul du degré d'hyperstatisme

Pour calculer le degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme constitué de S solides, il faut successivement :

1. effectuer $(S-1)$ études dynamiques (ou statiques) indépendantes et écrire les $6(S-1)$ équations scalaires faisant intervenir les I_S inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ;
2. mettre ces équations sous la forme d'un système linéaire :



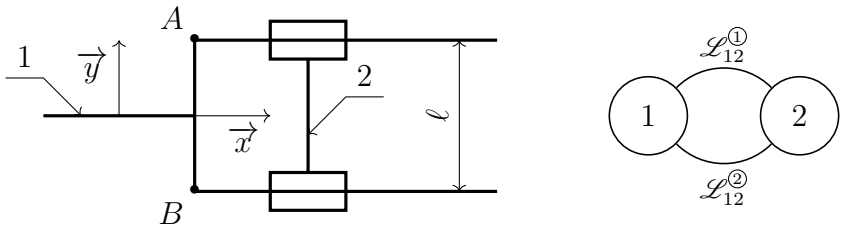
   où la matrice A, de taille $6(S-1) \times I_S$, multiplie un vecteur regroupant les I_S inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons. Dans le membre de droite sont regroupées les actions mécaniques extérieures de type force (F_{ext}) ou couple (C_{ext}) et les actions dynamiques (cf. cours de dynamique de 2e année).
3. mettre ce système linéaire sous forme échelonnée par lignes en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan [2] :



   Le nombre de colonnes de A ne contenant pas de pivot (pivot nul) correspond au nombre d'inconnues du système qui jouent le rôle de paramètres en fonction desquels on pourra résoudre le système : ce sont les inconnues hyperstatiques h du mécanisme. Le nombre de colonnes contenant un pivot (non nul) est égal au rang $r_S = \text{rg}(A)$ de la matrice A et correspondant au nombre d'inconnues d'actions de liaison du système que l'on pourra expliciter en fonction des h paramètres.

2. Voir le cours de mathématiques.

Exemple 4.1 (Liaisons pivots en parallèle)
Considérons deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles et non confondus ($\ell \neq 0$) en parallèle entre deux solides S_1 et S_2 comme décrit ci-dessous.



Les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par ces deux liaisons s'écrivent respectivement :

$$\left\{\mathscr{T}_{1\to2}^{①}\right\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{12}^{①}\,\overrightarrow{y} + Z_{12}^{①}\,\overrightarrow{z} \\ M_{12}^{①}\,\overrightarrow{y} + N_{12}^{①}\,\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_A \quad \text{et} \quad \left\{\mathscr{T}_{1\to2}^{②}\right\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{12}^{②}\,\overrightarrow{y} + Z_{12}^{②}\,\overrightarrow{z} \\ M_{12}^{②}\,\overrightarrow{y} + N_{12}^{②}\,\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_B$$

en fonction de $I_S = 8$ inconnues d'actions mécaniques transmissibles. En isolant le solide S_2 supposé en équilibre dans le référentiel associé au solide S_1 supposé galiléen, le principe fondamental de la statique s'écrit :

$$\left\{\mathscr{T}_{1\to2}^{①}\right\} + \left\{\mathscr{T}_{1\to2}^{②}\right\} + \left\{\mathscr{T}_{\text{ext}\to2}\right\} = \{0\}$$

avec le torseur d'actions mécaniques extérieures :

$$\left\{\mathscr{T}_{\text{ext}\to2}\right\} = \left\{\begin{array}{c} X_{\text{ext}}\,\overrightarrow{x} + Y_{\text{ext}}\,\overrightarrow{y} + Z_{\text{ext}}\,\overrightarrow{z} \\ L_{\text{ext}}\,\overrightarrow{x} + M_{\text{ext}}\,\overrightarrow{y} + N_{\text{ext}}\,\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_A$$

Une fois tous les torseurs réduits au même point A

$$\left\{\mathscr{T}_{1\to2}^{②}\right\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{12}^{②}\,\overrightarrow{y} + Z_{12}^{②}\,\overrightarrow{z} \\ -\ell\,Z_{12}^{②}\,\overrightarrow{x} + M_{12}^{②}\,\overrightarrow{y} + N_{12}^{②}\,\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_A$$

avec $\overrightarrow{AB} = -\ell\,\overrightarrow{y}$, on obtient le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 0 = X_{\text{ext}} \\ 0 = Y_{12}^{①} + Y_{12}^{②} + Y_{\text{ext}} \\ 0 = Z_{12}^{①} + Z_{12}^{②} + Z_{\text{ext}} \\ 0 = -\ell\,Z_{12}^{②} + L_{\text{ext}} \\ 0 = M_{12}^{①} + M_{12}^{②} + M_{\text{ext}} \\ 0 = N_{12}^{①} + N_{12}^{②} + N_{\text{ext}} \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} Y_{12}^{①} \\ Y_{12}^{②} \\ Z_{12}^{①} \\ Z_{12}^{②} \\ M_{12}^{①} \\ M_{12}^{②} \\ N_{12}^{①} \\ N_{12}^{②} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} X_{\text{ext}} \\ Y_{\text{ext}} \\ Z_{\text{ext}} \\ L_{\text{ext}} \\ M_{\text{ext}} \\ N_{\text{ext}} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le rang $r_S = \text{rg}(A)$ de ce système linéaire, il suffit d'arranger les lignes

et les colonnes de la matrice A telles que le système devienne :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'} \cdot \begin{pmatrix} Y_{12}^{①} \\ Z_{12}^{①} \\ Z_{12}^{②} \\ M_{12}^{①} \\ N_{12}^{①} \\ M_{12}^{②} \\ N_{12}^{②} \\ Y_{12}^{②} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Y_{\text{ext}} \\ Z_{\text{ext}} \\ L_{\text{ext}} \\ M_{\text{ext}} \\ N_{\text{ext}} \\ X_{\text{ext}} \end{pmatrix}$$

On obtient immédiatement le rang $r_S = \text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 5$ de ce système linéaire correspondant au nombre de pivots (non nuls). On en déduit le degré d'hyperstatisme :

$$h = I_S - r_S = 8 - 5 = 3$$

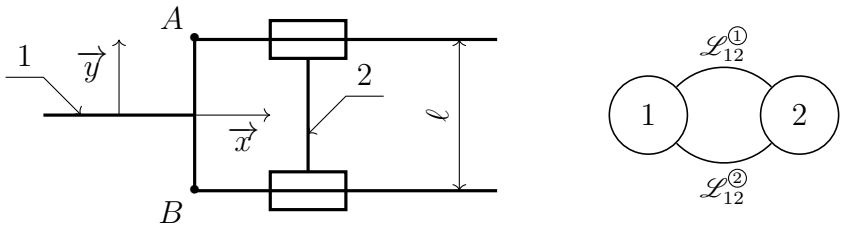
On notera que si le calcul du rang permet de déterminer de degré d'hyperstatisme, il permet aussi de calculer le degré de mobilité de la liaison cinématique équivalente, égal à $E_S - r_S = 1$. On retrouve donc que la liaison cinématique équivalente est une liaison glissière mais que ce modèle avec deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles est hyperstatique de degré 3. Pour obtenir une modélisation isostatique (telle que $h = 0$), il est nécessaire de remplacer la liaison pivot glissant d'axe $(B, \overrightarrow{x})$ par une liaison sphère–plan de normale $(B, \overrightarrow{z})$ telle que les trois actions de liaisons $Y_{12}^{②}$, $M_{12}^{②}$ et $N_{12}^{②}$ soient nulles.

Exemple 4.2 (Système d'encapsulation)
Reprenons l'exemple du système d'encapsulation comportant $S = 5$ solides. Pour déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme, il est nécessaire de réaliser successivement $S - 1 = 4$ isolements indépendants puis de déterminer le rang d'un système linéaire constitué de 24 équations et de 21 inconnues. Par anticipation sur le contenu de la section 5, nous ne mènerons pas ce calcul, beaucoup plus long que l'approche cinématique menée précédemment.

4.2 Influence du degré d'hyperstatisme sur la technologie

Le degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme est associé au nombre d'inconnues de liaisons qu'il est impossible de déterminer avec une simple étude dynamique (ou statique). Pour pouvoir supprimer (au moins temporairement) ces inconnues hyperstatiques, il convient d'introduire des degrés de libertés correspondant à des contraintes géométriques de montage et de « bon » fonctionnement. Par exemple, dans le cas où l'inconnue hyperstatique est une composante de résultante dans une direction $\overrightarrow{x}$, alors le paramètre de bon fonctionnement associé sera un réglage de la position dans cette direction. Si l'inconnue hyperstatique est celle d'un moment autour d'un axe $(O, \overrightarrow{x})$, alors le paramètre de bon fonctionnement sera un réglage d'orientation autour du même axe.

Exemple 4.3 (Liaisons pivots en parallèle)
Reprenons l'exemple avec deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles et non confondus ($\ell \neq 0$) entre deux solides S_1 et S_2 comme décrit ci-dessous.



Les conditions d'équilibre ont fait émerger trois inconnues hyperstatiques $Y_{12}^{②}$, $M_{12}^{②}$ et $N_{12}^{②}$, qu'il convient « d'annuler temporairement » pour pouvoir déterminer les autres actions mécaniques transmissibles. Or annuler $Y_{12}^{②}$ revient à introduire un paramètre de réglage en translation dans la direction $\overrightarrow{y}$ et annuler les moments $M_{12}^{②}$ et $N_{12}^{②}$ revient respectivement à introduire un paramètre de réglage d'orientation autour de l'axe $(B, \overrightarrow{y})$ et autour de l'axe $(B, \overrightarrow{z})$. Les trois inconnues hyperstatiques sont donc associées à des conditions géométriques de montage et de fonctionnement bien définies. Ainsi, pour pouvoir réaliser « correctement » une liaison glissière avec deux liaisons pivot glissant en parallèle, il est nécessaire d'introduire un réglage pour que les deux axes soient bien parallèles.

Table 2 – Hyperstatisme et contraintes géométriques.

Contrainte géométrique	*Éléments*	*Paramètres*
Parallélisme	droite/droite	2 angles
	droite/plan	1 angle
	plan/plan	2 angles
Perpendicularité	droite/droite (non coplanaires)	1 angle et 1 longueur
	droite/droite (coplanaires)	1 angle
	plan/plan	1 angle
Coaxialité	droite/droite	2 angles et 2 longueurs
Localisation	point/point	3 longueurs
Symétrie	plan/plan	1 angle et 1 longueur
Inclinaison	droite/droite	1 angle et 1 longueur
	droite/plan	2 angles

On notera toutefois que l'introduction de paramètres de réglages, nécessaire pour envisager un fonctionnement correct des mécanismes, ne permet en aucun cas de déterminer les actions mécaniques réellement transmises par les liaisons. De plus, de par leur nature, les mécanismes de réglage imposent des contraintes géométriques aux pièces du mécanisme ce qui peut les déformer. Or, imposer une position ou une orientation à une pièce conduit, de façon générale, à augmenter la rigidité du mécanisme.

5 Formulation globale

L'objectif de la formulation globale est d'établir un lien entre le degré de mobilités m d'un mécanisme et son degré d'hyperstatisme h.

5.1 Relation fondamentale

Considérons un mécanisme constitué de S solides (dont le bâti) et L liaisons tels que le graphe de structure contienne $\gamma = L - S + 1$ cycles indépendants.

Théorème 5.1
La relation fondamentale de la théorie des mécanismes est donnée par la relation d'équivalence :

$$h - m = E_C - I_C = I_S - E_S$$

liant les degrés d'hyperstatisme h et de mobilité m d'un mécanisme à ses caractéristiques cinématiques (I_C inconnues et $E_C = 6\gamma$ équations) ou dynamiques (I_S inconnues et $E_S = 6(S-1)$ équations).

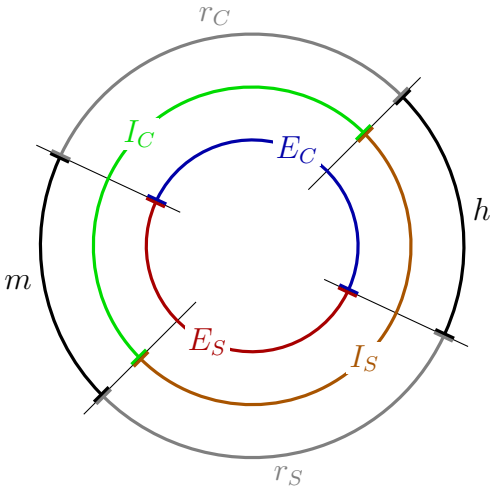
Démonstration. Pour chaque cycle, on peut établir $E_C = 6\gamma$ équations scalaires de fermeture cinématique associées aux I_C inconnues cinématiques. Le calcul du rang r_C du système de E_C équations permet de déterminer le degré de mobilité $m = I_C - r_C$ et le calcul du rang r_S du système de E_S équations permet de déterminer le degré d'hyperstatisme $h = I_S - r_S$. En exploitant la notion de dualité des torseurs cinématiques et d'actions mécaniques transmissibles qui s'écrit pour L liaisons $6L = I_C + I_S$, il vient :

$$6L = I_C + I_S = r_C + m + r_S + h$$

De même, en utilisant la relation entre le nombre de liaisons, le nombre de solides et le nombre cyclomatique $L = \gamma + S - 1$, il vient la relation :

$$6L = 6\gamma + 6(S-1) = E_C + E_S$$

que l'on peut représenter sous forme de cercles de longuueur $6L$:



En notant $\mathcal{E}_S$, $\mathcal{E}_C$, $\mathcal{I}_S$, $\mathcal{I}_C$, $\mathcal{R}_S$, $\mathcal{R}_C$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{M}$ les ensembles de cardinaux respectifs E_S, E_C, I_S, I_C, r_S, r_C, h et m, il vient schématiquement :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_S = \mathcal{I}_S \cap \mathcal{E}_S \\ \mathcal{H} = \mathcal{I}_S \backslash \mathcal{E}_S \in \mathcal{E}_C \backslash \mathcal{I}_C \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{R}_C = \mathcal{I}_C \cap \mathcal{E}_C \\ \mathcal{M} = \mathcal{I}_C \backslash \mathcal{E}_C \in \mathcal{E}_S \backslash \mathcal{I}_S \end{cases}$$

où la notation $A \backslash B$ signifie l'ensemble A privé de B.

D'après les deux approches cinématiques et statiques, on cherche donc à résoudre le système :

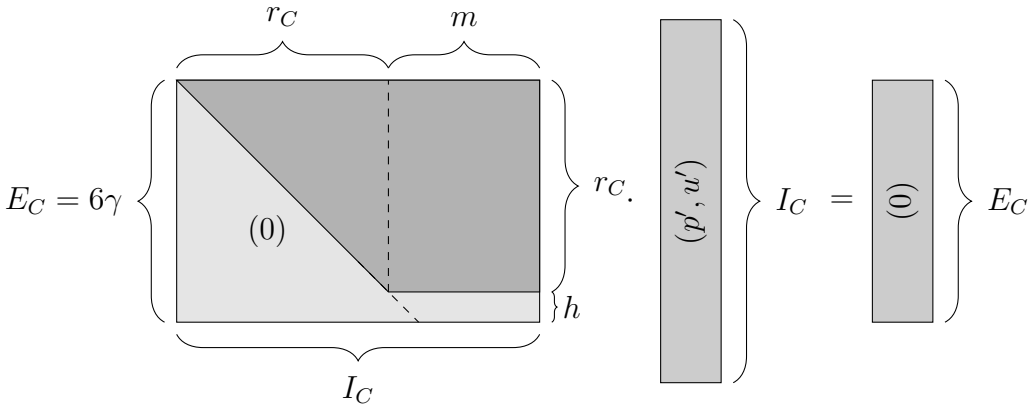
$$\begin{cases} \alpha = E_C - r_C \\ \beta = E_S - r_S \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = E_C - I_C + m \\ \beta = E_S - I_S + h \end{cases}$$

où α et β caractérisent respectivement le nombre d'équations trivialement vérifiées $(0 = 0)$ de l'étude cinématique et de l'étude dynamique. On rappelle qu'une équation de fermeture cinématique est trivialement vérifiée si elle n'est associée à aucune inconnue cinématique, ce qui, dans le cas d'un cycle, indique au moins deux inconnues d'action mécaniques transmissibles non nulles, et sera donc associé à degré d'hyperstatisme $h = \alpha$. De façon analogue, les équations de statique ou dynamique trivialement vérifiées correspondent à des mobilités $m = \beta$. Ce qui conduit finalement à la relation d'équivalence :

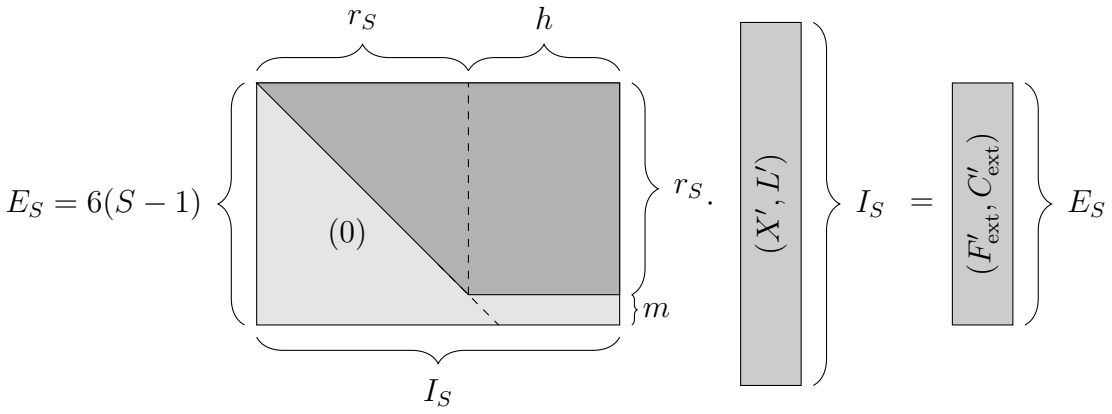
$$E_C - I_C = I_S - E_S = h - m$$

liant les degrés d'hyperstatisme h et de mobilité m d'un mécanisme. □

Cette relation fondamentale est basée sur l'analyse conjointe des deux systèmes d'équations, respectivement issus d'une analyse cinématique et d'une analyse statique ou dynamique. Nous avons montré que le nombre d'équations « inutiles » de l'étude cinématique vaut $h = E_C - r_C$; ce que l'on peut illustrer sous la forme :



De façon analogue, nous avons montré que le nombre d'équations « inutiles » de l'étude statique (ou dynamique) vaut $m = E_S - r_S$; ce que l'on peut illustrer sous la forme :



La notion de dualité se reflète clairement dans chacune de ces deux formulations où le degré d'hyperstatisme h limite le nombre d'équations cinématiques et où le degré de mobilité m limite le nombre d'équations statiques (ou dynamiques). On retiendra donc les relations :

$$h = E_C - r_C = I_S - r_S$$
$$m = E_S - r_S = I_C - r_C$$

Par passage à la limite de cette relation d'équivalence, on remarque bien que pour un mécanisme immobile ($m = 0$), le degré d'hyperstatisme correspond bien au nombre d'inconnues d'actions de liaisons « en trop » et que pour un mécanisme isostatique ($h = 0$), le degré de mobilité correspond bien au nombre d'équations cinématiques supplémentaires au nombre d'inconnues.

Remarque 5.1 (Modélisation plane)
Dans le cas d'une modélisation plane d'un mécanisme, la relation d'équivalence reste évidemment valable et il s'agira juste de changer le complément à 6 pour le complément à 3 entre le nombre d'inconnues cinématiques et le nombre d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons, tel que l'on ait pour L liaisons :

$$3L = I_C + I_S$$

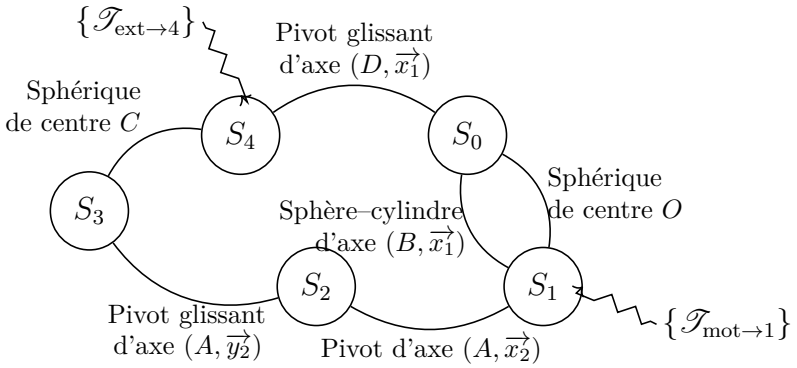
5.2 Détermination pratique

Pour estimer h et m à partir d'une analyse complète (écriture de toutes les équations), les deux méthodes (cinématique ou statique) sont équivalentes. Cependant, on préférera utiliser l'approche cinématique principalement parce qu'elle nécessite en général d'écrire beaucoup moins d'équations. Ainsi, pour déterminer le degré d'hyperstatisme, l'approche que l'on retiendra sera :

- effectuer le graphe de structure à partir d'un modèle cinématique d'architecture du mécanisme (pour ne pas perdre d'information) et déterminer le nombre d'équations et d'inconnues cinématiques ;
- déterminer le degré de mobilité (total) du mécanisme, si possible par une démarche intuitive en séparant la détermination du nombre de mobilités utiles (lié au nombre de relations entrée(s)–sortie(s) indépendantes du mécanisme) et le nombre de mobilités internes (lié au nombre de mouvements entre les pièces du mécanisme qui n'affectent pas le fonctionnement du mécanisme) ;
- en déduire le degré d'hyperstatisme du mécanisme avec la relation :

$$h = E_C - I_C + m$$

Exemple 5.1 (Système d'encapsulation)
Reprenons l'exemple du système d'encapsulation où nous avons cette fois fait figurer les actions mécaniques extérieures sur le graphe de liaisons.



Pour déterminer le degré d'hyperstatisme de ce système, plutôt que de réaliser successivement $S - 1 = 4$ isolements indépendants et de déterminer le rang d'un système de 24 équations à 21 inconnues, nous allons utiliser la relation fondamentale d'équivalence. En étudiant le système cinématique de $E_C = 12$ équations à $I_C = 15$ inconnues, nous avions trouvé $m = 3$ et une analyse rapide avait montré qu'une de ces mobilités était utile et que deux étaient des mobilités internes associées à des rotations sans effet sur le fonctionnement au niveau de la liaison sphérique de centre C. Ce qui conduit à un degré d'hyperstatisme :

$$h = E_C - I_C + m = 12 - 15 + 3 = 0$$

Ce degré est nul ce qui signifie que le mécanisme est isostatique. On peut remarquer que ce résultat est notamment dû aux mobilités internes qui permettent ici de « relâcher » deux contraintes d'orientation au niveau des deux liaisons pivot glissant.

* *
*