Espérance et variance

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 février 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, on se place dans un espace probabilisé fini (Ω, P).

1 Espérance d'une variable aléatoire

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Espérance)

Soit X une variable aléatoire réelle ou complexe. On appelle **espérance** de X la valeur

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Lorsque $E(X) = 0$, on dit que la variable est **centrée**.

Remarque. L'espérance donne une moyenne des valeurs atteintes par X, c'est donc un **indicateur de position**. Si on décale toutes les valeurs de X, l'espérance sera décalée en conséquence.

Exemple. Soit X une variable aléatoire qui vérifie $X(\Omega) = [\![-1, 1]\!]$, $P(X = -1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{4}$. Alors $E(X) = -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0$, donc X est une variable centrée.

Exemple. Soit A un ensemble fini non vide et X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{U}(A)$. On a :

$$E(X) = \sum_{x \in A} xP(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(A)} \sum_{x \in A} x.$$

Proposition 1.2 (Expression alternative)

Soit X une variable aléatoire réelle ou complexe. Alors $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.

Remarque. Cette forme servira peu en exercices, mais sera très utile pour démontrer les résultats du cours.

Proposition 1.3 (Linéarité)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles ou complexes et λ, μ deux constantes, alors

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Remarque. En particulier, l'espérance de la somme est égale à la somme des espérances.

Exercice 1. On lance deux dés, et on note S la somme de leurs résultats. Déterminer l'espérance de S.

Proposition 1.4 (Inégalité triangulaire)

Soit X une variable aléatoire réelle ou complexe, alors $|E(X)| \leqslant E(|X|)$.

Proposition 1.5 (Positivité)

Soit X une variable aléatoire réelle positive. Alors $E(X) \geqslant 0$.

Proposition 1.6 (Croissance)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Si $X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Remarque. En particulier, si X est à valeurs dans un intervalle I, $E(X) \in I$.

1.2 Espérance des lois usuelles

Proposition 1.7 (Espérance d'une variable aléatoire constante)

Soit X une variable aléatoire constante de valeur m, alors $E(X) = m$.

Proposition 1.8 (Espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli)

Soit $p \in [0,1]$. Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$.

Remarque. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, le cas particulier de la variable indicatrice donne $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$, puisqu'on sait que $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$.

Proposition 1.9 (Espérance d'une variable aléatoire binomiale)

Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$.

1.3 Formule de transfert et espérance du produit

Proposition 1.10 (Formule de transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle ou complexe et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x).$$

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$. Déterminer $E(X^2)$.

Remarque. La formule de transfert s'applique en particulier aux couples (ou n-uplets) de variables aléatoires. Si X et Y sont des variables aléatoires et g est une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a par exemple :

$$E(g(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x,y) P(X = x, Y = y).$$

Proposition 1.11 (Cas de variables aléatoires indépendantes)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles ou complexes. Si elles sont indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Remarque. Ce résultat s'étend sans difficulté au cas de n variables aléatoires indépendantes.

Remarque. On peut utiliser ce résultat pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes : il suffit de vérifier que $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

Exercice 3. Soient X_1, X_2 et X_3 indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que les variables aléatoires $Y_1 = X_1X_2$ et $Y_2 = X_2X_3$ ne sont pas indépendantes.

Remarque. Attention, ce résultat n'est pas une équivalence : la relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ ne suffit pas à garantir l'indépendance des variables.

Exemple. Soit $Z \sim \mathcal{U}(\{-1,1\})$ et Y une variable aléatoire indépendante de Z. Alors, Y et $X = ZY$ ne sont clairement pas indépendantes (elles ont même module), pourtant le lemme des coalitions la relation $E(Z) = 0$ et l'indépendance de Z et Y donnent :

$$E(XY) = E(ZY^2) = E(Z)E(Y^2) = 0 = E(Y)E(Z)E(Y) = E(Y)E(X).$$

2 Variance, écart-type et covariance

2.1 Variance, écart-type et premières propriétés

Définition 2.1 (Variance, écart-type)

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **variance** de X la valeur $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ et **écart-type** de X la valeur $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Lorsque $V(X) = 1$, on dit que la variable est **réduite**.

Remarque. Contrairement au cas de l'espérance, le programme ne s'intéresse pas à la variance de variables aléatoires complexes. Cela permet de garantir que la variance sera toujours positive (puisque c'est l'espérance d'une fonction positive).

Remarque. La variance (ou l'écart-type) donnent une idée d'à quel point les valeurs de X s'écartent de leur valeur moyenne, c'est donc un **indicateur de dispersion**. Si on décale toutes les valeurs de X, la variance ne sera pas modifiée.

Proposition 2.2 (Variance d'une combinaison linéaire)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et X une variable aléatoire réelle, alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Remarque. On en déduit que $\sigma(aX + b) = \sqrt{a^2 V(X)} = |a|\,\sigma(X)$.

Remarque. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\sigma(X) > 0$. On pose $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$, les propriétés de l'espérance et la variance donnent alors :

$$E(Z) = \frac{E(X) - E(X)}{\sigma(X)} = 0 \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{V(X)}{\sigma(X)^2} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1.$$

Z est donc une variable aléatoire centrée réduite.

Proposition 2.3 (Formule de König-Huygens)

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Proposition 2.4 (Cas de la variance nulle)

Soit X une variable aléatoire réelle. Alors : $V(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$.

Remarque. Dans le cas d'un univers Ω fini, $P(X = E(X)) = 1$ signifie que X est une variable aléatoire constante, qui vaut $E(X)$.

2.2 Variance des lois usuelles

Proposition 2.5 (Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli)

Soit $p \in [0, 1]$. Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $V(X) = p(1 - p)$.

Proposition 2.6 (Variance d'une variable aléatoire binomiale)

Soit $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1 - p)$.

2.3 Covariance et variables aléatoires décorrélées

Définition 2.7 (Covariance)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. On appelle **covariance** de X et Y la valeur :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, on dit que les variables X et Y sont **décorrélées**.

Remarque. En particulier, $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$ et $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.

Proposition 2.8 (Formule de König-Huygens)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Alors : $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Remarque. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a déjà montré que $E(XY) = E(X)E(Y)$, et donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Deux variables aléatoires indépendantes sont donc toujours décorrélées.
La réciproque est fausse, par contre : des variables peuvent être décorrélées sans être indépendantes, pour peu que $E(XY) = E(X)E(Y)$ (cf contre-exemple étudié plus haut).

Proposition 2.9 (Variance d'une somme de variables aléatoires)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Alors : $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
En particulier, si X et Y sont décorrélées, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque. Dans le cas de variables indépendantes, on a donc $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$. Ce résultat se généralise naturellement à une somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Remarque. Ce résultat donne une nouvelle manière de calculer la variance de la loi binomiale.
Soit $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle telle que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. On introduit des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $X_1 + \cdots + X_n$ et X ont même loi, ce qui donne :

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

3 Inégalités probabilistes

3.1 Inégalité de Markov

Proposition 3.1 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle positive et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $P\left(X \geqslant \lambda\right) \leqslant \dfrac{E\left(X\right)}{\lambda}$.

Remarque. Les majorations fournies par l'inégalité de Markov sont assez brutales : pour de petites valeurs de λ, $\frac{E(X)}{\lambda}$ peut même dépasser 1 ! C'est cependant une première approche intéressante, en attendant de savoir comment obtenir des bornes plus précises.

Exercice 4. Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure, indépendamment des autres. Déterminer un entier N tel que si l'entreprise a N lignes de téléphone, la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant est au plus égale à $\frac{1}{4}$.

3.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Proposition 3.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors $P\left(|X - E\left(X\right)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Remarque. Ici encore, les majorations obtenues sont brutales, mais l'approche reste intéressante.

Exercice 5. On dispose d'une pièce truquée dont la probabilité d'obtention de pile est notée $p \in [0,1]$. Pour déterminer p, on lance cette pièce $n \in \mathbb{N}^*$ fois et on note F la fréquence d'apparition de pile ainsi obtenue. À partir de quelle valeur de n la probabilité pour que F soit une approximation de p à 10^{-2} près est-elle supérieure à $0,9$?

Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi. On note m leur espérance et σ leur écart-type. Posons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ leur valeur moyenne. Alors par indépendance et propriétés de l'espérance et la variance,

$$E(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n}nm = m \quad \text{et} \quad V(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X_1 et à S_n donne alors respectivement : soit $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_1 - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad P(|S - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Le n au dénominateur dans cette deuxième inégalité la rend bien plus intéressante : si on part du principe que la valeur de m est inconnue, plus n augmente, plus S_n représente une approximation fiable de m. Pour estimer la valeur du paramètre m, utiliser une moyenne de variables indépendantes de même loi est donc très efficace.