Espérance et variance

Exercice 1 (★). Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket -3, 3 \rrbracket)$ et $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 2 (★). Soit $p \in [0,1]$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Pour tous i et n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Déterminer la loi de Y_i puis calculer $E(S_n)$.

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on suppose que $P(X = k) = \ln(a^k)$, où a est un réel strictement positif.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que X soit une variable aléatoire.
2. Pour cette valeur, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

   Indication : on pourra utiliser sans démonstration la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4 (★). Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

1. Soit $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = a^X$.
2. Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

Exercice 5 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à $2n$. Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. On tire au hasard un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire associée au numéro obtenu. Si ce numéro est supérieur ou égal à k alors on note le numéro, sinon on remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton dont on note alors le numéro. Soit Y la variable aléatoire associée au numéro noté.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Pour quelle valeur de k l'espérance de Y est-elle maximale ?

Exercice 6 (★★). On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

— **Méthode 1** On analyse le sang de chacune des N personnes.

— **Méthode 2** On regroupe la population en m groupes de n individus (on a donc $m \times n = N$). On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1. Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?
2. Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n et p.
3. Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000$, $n = 100$ et $p = 0,01$.
   On utilisera l'approximation $0,99^{100} \simeq 0,366$.

Exercice 7 (★). Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\llbracket -1, 1 \rrbracket$. On note $Y = X^2$.

1. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Commenter.

Exercice 8 (★★). Soit $p \in]0,1[$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. A chaque instant, elle fait un bond de taille 1 vers la droite ou vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1-p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer une fonction f affine telle que $f(U)$ soit une variable aléatoire qui vaut 1 avec probabilité p, et -1 avec probabilité $1-p$.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que X_n peut être mis sous la forme $X_n = 2S_n - n$, où S_n est une variable de loi $\mathcal{B}(n,p)$.
3. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
4. Comment se comportent $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque $n \to +\infty$? Interpréter.

Exercice 9 (★). Un dé régulier est lancé 9000 fois. Minorer la probabilité d'obtenir le résultat 6 entre 1400 et 1600 fois en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 10 (★★). On lance n fois un dé non pipé à six faces. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer un minorant des valeurs de n pour lesquelles on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition de la valeur 1 qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur théorique $\frac{1}{6}$.

Exercice 11 (Type DS)**.** Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir chacune au plus n boules ($n \geqslant 1$). On s'intéresse au protocole suivant

— On choisit l'urne A avec la probabilité $\frac{1}{2}$, l'urne B sinon.

— On met une boule dans l'urne choisie.

— On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

1. Donner les lois de R_1 et R_2. Justifier vos calculs.
2. Calculer l'espérance et la variance de R_1 et R_2.
   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $n \geqslant 2$.
3. Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?
4. Soit k appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.
   (a) Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)$-ième tirage l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.
   (b) Donner alors la probabilité $P(R_n = k)$.
5. Vérifier que $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $2(k+1)P(R_n = k+1) = (n+k)P(R_n = k)$.
6. Par sommation de la relation qui précède, en déduire que $E(R_n) = n - (2n-1)P(R_n = n-1)$.
7. De façon analogue, montrer que $E(R_n^2) = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$.
8. En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de n et $E(R_n)$.