Espérance et variance

Exercice 1 (★). Soit $X \sim \mathcal{U}(\llbracket -3,3 \rrbracket)$ et $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Résultat attendu : $Y(\Omega) = \{0,1,4,9\}$, $P(Y=0) = \dfrac{1}{7}$, $P(Y=1) = \dfrac{2}{7}$, $P(Y=4) = \dfrac{2}{7}$, et $P(Y=9) = \dfrac{2}{7}$. On en déduit $E(Y) = 4$ et $V(Y) = 12$.

Exercice 2 (★). Soit $p \in [0,1]$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Pour tous i et n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Déterminer la loi de Y_i puis calculer $E(S_n)$.

Résultat attendu : On montre que $Y_i \sim \mathcal{B}(p^2)$ et $E(S_n) = np^2$.

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\llbracket 0,n \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 0,n \rrbracket$, on suppose que $P(X=k) = \ln(a^k)$, où a est un réel strictement positif.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a telle que X soit une variable aléatoire.
2. Pour cette valeur, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

   Indication : on pourra utiliser sans démonstration la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Résultat attendu : $a = \exp\left(\dfrac{2}{n(n+1)}\right)$, $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$ et $V(X) = \dfrac{(n-1)(n+2)}{18}$.

Exercice 4 (★). Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

1. Soit $a > 0$. Calculer l'espérance de $Z = a^X$.
2. Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

Résultat attendu : $E(Z) = (ap+1-p)^n$, $E(Y) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

Exercice 5 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à $2n$. Soit $k \in \llbracket 1,2n \rrbracket$. On tire au hasard un jeton dans l'urne. Soit X la variable aléatoire associée au numéro obtenu. Si ce numéro est supérieur ou égal à k alors on note le numéro, sinon on remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton dont on note alors le numéro. Soit Y la variable aléatoire associée au numéro noté.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Pour quelle valeur de k l'espérance de Y est-elle maximale ?

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1,2n \rrbracket)$.
2. $Y(\Omega) = \llbracket 1,2n \rrbracket$. Si $i \geqslant k$, $P(Y=i) = \frac{2n+k-1}{4n^2}$, sinon $P(Y=i) = \frac{k-1}{4n^2}$.
3. L'espérance est maximale quand $k = n+1$.

Exercice 6 (★★). On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (résultat du test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec probabilité p. On dispose pour cela de deux méthodes :

— **Méthode 1** On analyse le sang de chacune des N personnes.

— **Méthode 2** On regroupe la population en m groupes de n individus (on a donc $m \times n = N$). On collecte le sang des n individus de chaque groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on procède alors à une analyse individuelle de ses membres.

1. Quelle est la loi de la variable X égale au nombre de groupes positifs ?
2. Soit Y la variable égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer $E(Y)$ en fonction de N, n et p.
3. Comparer les deux méthodes lorsque $N = 1000$, $n = 100$ et $p = 0,01$.
   On utilisera l'approximation $0,99^{100} \simeq 0,366$.

Résultat attendu :

1. $X \sim \mathcal{B}(m, 1-(1-p)^n)$.
2. $E(Y) = \frac{N}{n} + N - N(1-p)^n$.
3. La méthode 1 nécessite 1000 tests (de manière certaine), la méthode 2 en nécessite en moyenne 644 et est donc préférable.

Exercice 7 (★). Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![-1,1]\!]$. On note $Y = X^2$.

1. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Commenter.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Les variables sont donc décorrélées, mais pas indépendantes.

Exercice 8 (★★). Soit $p \in]0,1[$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. A chaque instant, elle fait un bond de taille 1 vers la droite ou vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1-p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n.

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer une fonction f affine telle que $f(U)$ soit une variable aléatoire qui vaut 1 avec probabilité p, et -1 avec probabilité $1-p$.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que X_n peut être mis sous la forme $X_n = 2S_n - n$, où S_n est une variable de loi $\mathcal{B}(n,p)$.
3. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
4. Comment se comportent $E(X_n)$ et $V(X_n)$ lorsque $n \to +\infty$? Interpréter.

Résultat attendu :

1. La fonction $t \mapsto 2t-1$ convient
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note : $U_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k\text{-ième bond est vers la droite} \\ 0 & \text{s'il est vers la gauche} \end{cases}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$.
3. $X_n(\Omega) = \{2k-n \mid k \in [\![0,n]\!]\}$, avec $P(X_n = 2k-n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
   De plus, par linéarité, $E(X_n) = n(2p-1)$, et $V(X_n) = 4np(1-p)$.
4. $V(X_n)$ tend vers $+\infty$, ce qui est logique : la plage des valeurs possibles de X_n ne fait que s'élargir. Pour $E(X_n)$, il y a 3 cas : si $p > \frac{1}{2}$, $E(X_n) \to +\infty$; si $p < \frac{1}{2}$, $E(X_n) \to -\infty$; si $p = \frac{1}{2}$, $E(X_n) = 0$. C'est logique aussi : suivant la valeur de p, la marche aléatoire dévie vers la droite ou vers la gauche.

Exercice 9 (★). Un dé régulier est lancé 9000 fois. Minorer la probabilité d'obtenir le résultat 6 entre 1400 et 1600 fois en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Résultat attendu : On applique l'inégalité à la variable aléatoire X qui compte le nombre de 6.
Le minorant cherché est $\frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$.

Exercice 10 (★★). On lance n fois un dé non pipé à six faces. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, déterminer un minorant des valeurs de n pour lesquelles on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition de la valeur 1 qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur théorique $\frac{1}{6}$.
Résultat attendu : Le minorant des valeurs de n cherché est $\frac{10^5}{36}$.

Exercice 11 (Type DS)**.** Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir chacune au plus n boules ($n \geqslant 1$). On s'intéresse au protocole suivant

- On choisit l'urne A avec la probabilité $\frac{1}{2}$, l'urne B sinon.
- On met une boule dans l'urne choisie.
- On répète cette épreuve autant de fois qu'il est nécessaire pour que l'une des urnes A ou B soit pleine, c'est-à-dire contienne n boules, les choix des urnes étant mutuellement indépendants.

On note R_n la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine, à l'issue de l'expérience.

1. Donner les lois de R_1 et R_2. Justifier vos calculs.
2. Calculer l'espérance et la variance de R_1 et R_2.
   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $n \geqslant 2$.
3. Quel est l'ensemble $R_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable R_n ?
4. Soit k appartenant à l'univers image $R_n(\Omega)$.
   (a) Calculer la probabilité qu'à l'issue du $(n-1+k)$-ième tirage l'urne A contienne $n-1$ boules et l'urne B contienne k boules.
   (b) Donner alors la probabilité $P(R_n = k)$.
5. Vérifier que $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $2(k+1)P(R_n = k+1) = (n+k)P(R_n = k)$.
6. Par sommation de la relation qui précède, en déduire que $E(R_n) = n - (2n-1)P(R_n = n-1)$.
7. De façon analogue, montrer que $E(R_n^2) = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$.
8. En déduire l'expression de $V(R_n)$ en fonction de n et $E(R_n)$.

Résultat attendu :

1. $R_1(\Omega) = \{0\}$, donc $P(R_1 = 0) = 1$.
   $R_2(\Omega) = \{0, 1\}$. On pose A_i (resp. B_i) l'événement « la i-ème boule va en A (resp. B) ». Alors $\forall i$, $P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{2}$. Or $\{R_2 = 0\} = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$, et ces deux événements sont incompatibles, donc $P(R_2 = 0) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2)$. Par indépendance des tirages, on en déduit ensuite que $P(R_2 = 0) = P(A_1)P(A_2) + P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{2}$. D'où $P(R_2 = 1) = 1 - P(R_2 = 0) = \frac{1}{2}$.
2. R_1 est une variable aléatoire certaine, donc $E(R_1) = V(R_1) = 0$. R_2 est une variable aléatoire de Bernoulli, donc $E(R_2) = \frac{1}{2}$ et $V(R_2) = \frac{1}{4}$.
3. $R_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ car il faut moins de n boules pour que l'urne ne soit pas pleine.
4. (a) Notons T_A cet événement. Pour qu'il soit réalisé, il faut tirer $n+k-1$ boules, en mettre $n-1$ dans A et k dans B. Il y a $\binom{n+k-1}{k}$ tirages qui réalisent cet événement, et 2^{n+k-1} tirages de $n+k-1$ boules sans contrainte. Donc par équiprobabilité, $P(T_A) = \frac{\binom{n+k-1}{k}}{2^{n+k-1}} = \frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-1}{k}$.
   Rmq : on pouvait aussi utiliser une loi $\mathcal{B}\left(n+k-1, \frac{1}{2}\right)$.
   (b) $\{R_n = k\} = (T_A \cap A_{n+k}) \cup (T_B \cap B_{n+k})$ (en réutilisant les notations des questions précédentes) car on ne sait pas à l'avance quelle urne sera remplie. Donc $P(R_n = k) = 2P(T_A)\frac{1}{2} = P(T_A) = \frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-1}{k}$.
5. C'est immédiat avec 4.a et b, et $\binom{n+k}{k+1} = \frac{n+k}{k+1}\binom{n+k-1}{k}$, car $k \geqslant 0$.
6. $E(R_n) = \sum_{k=0}^{n-1} kP(R_n = k) = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)P(R_n = k+1)$ par changement d'indice. La question 5 donne alors : $2E(R_n) = \sum_{k=0}^{n-2}(k+n)P(R_n = k) = n\sum_{k=0}^{n-2} P(R_n = k) + \sum_{k=0}^{n-2} kP(R_n = k)$, ce qui permet d'en déduire $2E(R_n) = n(1 - P(R_n = n-1)) + E(R_n) - (n-1)P(R_n = n-1)$. Cela donne le résultat demandé.
7. $E(R_n^2) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2P(R_n = k) = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)^2P(R_n = k+1)$. On trouve comme à la question précédente :
   $$\begin{aligned} 2E(R_n^2) &= \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(k+n)P(R_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} k^2P(R_n = k) + (n+1)\sum_{k=0}^{n-2} kP(R_n = k) + n\sum_{k=0}^{n-2} P(R_n = k) \\ &= E(R_n^2) - (n-1)^2P(R_n = n-1) + (n+1)\left(E(R_n) - (n-1)P(R_n = n-1)\right) + n(1 - P(R_n = n-1)) \end{aligned}$$
   En simplifiant, on obtient $E(R_n^2) = (n+1)E(R_n) + P(R_n = n-1)(-2n^2+n) + n = (2n+1)E(R_n) - n(n-1)$.
8. Par formule de Huygens, $V(R_n) = E(R_n^2) - E(R_n)^2 = (2n+1)E(R_n) - n(n-1) - E(R_n)^2$.