Exercice 1 (★). Pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la norme de $(1, 2, 3)$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2 (★). Soit u et v deux fonctions continues et positives sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1], u(x)v(x) \geq 1$. Montrer que $\left(\int_0^1 u(t)dt\right)\left(\int_0^1 v(t)dt\right) \geq 1$.

Exercice 3 (★). Soient $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$.

Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.

Exercice 4 (★). Soit f une fonction réelle, continue, et strictement positive sur un segment $[a, b]$. On pose $\ell(f) = \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$. Montrer que $\ell(f) \geq (b-a)^2$ et déterminer les éventuels cas d'égalité.

Exercice 5 (★★). Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$. Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n+p}^2 \leq I_{2n}I_{2p}$.

Exercice 6 (★). On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, et les vecteurs $e_1 = (2, 1)$ et $e_2 = (2, 2)$. Justifier que (e_1, e_2) est une base de E , et l'orthonormaliser.

Exercice 7 (★). Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$

1. Montrer que $\langle, \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$.

Exercice 8 (★★). Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E .

Exercice 9 (★). Dans les cas suivants (munis du produit scalaire usuel), déterminer une base de $F^\perp$, sa dimension, et la dimension de F .

1. $E = \mathbb{R}^2, F = \text{Vect}((3, -1))$.
2. $E = \mathbb{R}^3, F = \text{Vect}((1, 0, 1), (-1, -1, 1))$.
3. $E = \mathbb{R}^3, F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3, F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - x_2 = 0\}$.

Exercice 10 (★★). On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel.

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - z = 0 \text{ et } y + z = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus F^\perp$.

Exercice 11 (★★). Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. En déduire que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
3. Montrer que $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F^\perp \oplus G^\perp$.

Exercice 12 (★). Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $u = (1, 2, -1)$ sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 13 (★). Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer la distance de $v = (1, 2, 3)$ au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0\}$.

Exercice 14 (★★). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E . Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ du projecteur orthogonal sur la droite vectorielle dirigée par $\vec{i} - 3\vec{k}$.

Exercice 15 (★★★). Montrer que l'ensemble $A = \left\{ \int_0^\pi (e^x - a \cos(x) - b \sin(x))^2 dx \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ admet un minimum que l'on calculera.

Exercice 16 (Type DS). Soit φ l'application définie de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Dans la suite, on notera $\langle P, Q \rangle$ à la place de $\varphi(P, Q)$.
2. Calculer, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, l'intégrale $\int_{-1}^1 x^k dx$.
3. (a) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $Q_0(X) = 2X - 1$. Calculer $\langle P, Q_0 \rangle$ en fonction de a, b, c .
 (b) Soit $F = \text{Vect}(Q_0)$. En déduire une base de $F^\perp$, dont on notera $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ les vecteurs.
4. On note respectivement q_F et $q_{F^\perp}$ les projecteurs orthogonaux sur F et sur $F^\perp$.
 (a) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le polynôme $q_F(P(X))$ en fonction des réels a, b, c .
 (b) En déduire la matrice représentative de q_F dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, puis celle de $q_{F^\perp}$.
 (c) Déterminer la distance entre le polynôme $1 - X + 2X^2$ et le sous-espace F .
 (d) Quelles sont les matrices représentatives de q_F et $q_{F^\perp}$ dans la base $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2)$?
5. Déterminer explicitement une base orthonormée (π_0, π_1, π_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ adaptée à $F \oplus F^\perp$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t)dt = 1$. On note $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ses coordonnées dans la base (π_0, π_1, π_2) .
 (a) Sans calculer les α_i , déterminer la valeur de $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.
 (b) Soit $((a, b, c), (a', b', c')) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Montrer que $|aa' + bb' + cc'| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{(a')^2 + (b')^2 + (c')^2}$.
 (c) Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \leq \sqrt{\pi_0(x)^2 + \pi_1(x)^2 + \pi_2(x)^2}$.