

# Produits scalaires

Cours de É. Bouchet – PCSI

27 mai 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Produits scalaires et normes</b>	<b>2</b>
1.1	Produits scalaires . . . . .	2
1.2	Norme associée à un produit scalaire . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Orthogonalité</b>	<b>5</b>
2.1	Premières définitions et propriétés . . . . .	5
2.2	Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . . .	8
2.3	Bases orthonormées . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie</b>	<b>10</b>
3.1	Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace . . . . .	10
3.2	Projections orthogonales et propriétés . . . . .	11
3.3	Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie . . . . .	13

Dans ce chapitre, on se limite au cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

# 1 Produits scalaires et normes

## 1.1 Produits scalaires

### Définition 1.1 (Produit scalaire)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur  $E$  toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  qui est :

- **bilinéaire** :  $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  et  $\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$  ;
- **symétrique** :  $\forall (x, y) \in E^2, \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$  ;
- **définie positive** :  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$  et  $(\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E)$ .

**Remarque.** Suivant les contextes, le produit scalaire  $\langle x, y \rangle$  peut aussi se noter  $(x|y)$  ou  $x \cdot y$ .

**Remarque.** On montre en général la symétrie avant la bilinéarité, parce qu'il suffit alors de montrer la linéarité d'un seul côté (à droite ou à gauche, au choix).

**Remarque.** Soit  $x \in E$ , la linéarité à droite donne  $\langle x, 0_E \rangle = \langle x, 0 \cdot 0_E \rangle = 0 \langle x, 0_E \rangle = 0$ . La linéarité à gauche donne de même  $\langle 0_E, x \rangle = 0$ .

### Définition 1.2 (Espace préhilbertien réel, espace euclidien)

On appelle **espace préhilbertien réel** tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Si l'espace vectoriel est en plus de dimension finie, on parle d'**espace euclidien**.

### Proposition 1.3 (Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ )

L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* On vérifie (dans l'ordre qui nous arrange) les points de la définition :

- Symétrie : soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle$ .
- Bilinearité : par symétrie, il suffit de montrer la linéarité à gauche. Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a bien :

$$\langle \lambda x + y, z \rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i z_i + y_i z_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

- Positivité et cas d'annulation : soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ , d'où la positivité. On suppose maintenant que  $\langle x, x \rangle = 0$ . Comme c'est une somme de termes positifs, on en déduit  $x_1^2 = \dots = x_n^2 = 0$ , puis  $x_1 = \dots = x_n = 0$  et  $x = (0, \dots, 0)$ . Donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie positive.

Il s'agit donc bien d'un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ . □

**Remarque.** En particulier,  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique est un espace euclidien.

**Remarque.** On retrouve les formules du lycée : pour tous vecteurs  $\vec{u} = (x, y)$  et  $\vec{v} = (x', y')$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

**Remarque.** En utilisant les notations matricielle, le produit matriciel canonique sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit  $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ .

**Remarque.** Le produit scalaire canonique n'est pas le seul produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 1.** Montrer que l'application  $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$ .

Solution : On raisonne cette fois-ci sous forme matricielle pour alléger les calculs :

— Symétrie : soit  $X$  et  $Y$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Comme  $Y^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$  est un réel, il est égal à sa transposée, donc :

$$\varphi(Y, X) = Y^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \left( Y^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \right)^\top = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^\top Y = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y = \varphi(X, Y).$$

— Bilinearité : comme l'application est symétrique, il suffit de montrer la linéarité à gauche. Soit  $X, Y, Z$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , les propriétés de la transposée et du produit matriciel donnent :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda X + Y, Z) &= (\lambda X + Y)^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z \\ &= (\lambda X^\top + Y^\top) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z \\ &= \lambda X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z + Y^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Z \\ \varphi(\lambda X + Y, Z) &= \lambda \varphi(X, Z) + \varphi(Y, Z). \end{aligned}$$

— Positivité et cas d'annulation : soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\varphi(X, X) = X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 \geq 0.$$

On suppose maintenant que  $\varphi(X, X) = 0$ , alors :  $x = y = x + y = 0$  car  $x^2, y^2$  et  $(x + y)^2$  sont positifs. Donc :  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

L'application  $\varphi$  est donc bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 1.4** (Produit scalaire canonique sur  $C([a, b], \mathbb{R})$ )

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a < b$ . L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$  est un produit scalaire sur  $C([a, b], \mathbb{R})$ .

*Démonstration.* On revient à la définition d'un produit scalaire :

— Symétrie : soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ ,  $\langle g, f \rangle = \int_a^b g(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt = \langle f, g \rangle$ .

— Bilinearité : par symétrie, on se contente d'étudier la linéarité à gauche. Soit  $f, g, h$  des fonctions continues sur  $[a, b]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Par linéarité de l'intégrale,

$$\langle \lambda f + g, h \rangle = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))h(t)dt = \int_a^b \lambda f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle.$$

— Positivité et cas d'annulation : soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ ,  $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$  par positivité de l'intégrale. On suppose maintenant que  $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$ . Comme  $f$  est continue et positive, on obtient que  $f^2 = 0$  sur  $[a, b]$ , donc  $f = 0$ .

On a donc bien défini un produit scalaire sur  $C([a, b], \mathbb{R})$ . □

**Remarque.** Muni du produit scalaire défini ci-dessus,  $C([a, b], \mathbb{R})$  est un espace préhilbertien réel. Ce n'est par contre pas un espace euclidien car il n'est pas de dimension finie.

**Remarque.** Cette définition de produit scalaire s'adapte facilement à  $\mathbb{R}[X]$ . En effet, un polynôme qui s'annule sur  $[a, b]$  s'annule en une infinité de points, donc possède une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

## 1.2 Norme associée à un produit scalaire

**Définition 1.5** (Norme associée à un produit scalaire)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. On appelle **norme associée à ce produit scalaire** l'application définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  par :  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

On dit qu'un vecteur  $x$  de  $E$  est **unitaire** lorsque  $\|x\| = 1$ .

**Remarque.** Comme un produit scalaire est défini positif, on en déduit que pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$ .

**Définition 1.6** (Distance associée à une norme)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $(x, y) \in E^2$ . On appelle **distance** entre  $x$  et  $y$  le réel

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

**Remarque.** Attention : ces notions de norme et de distance dépendent du produit scalaire associé. Par exemple, pour le produit scalaire  $(X, Y) \rightarrow X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$  sur  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2} \neq 1.$$

**Proposition 1.7** (Identité remarquable)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $(x, y) \in E^2$ , alors  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la bilinéarité et de la symétrie :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

□

**Remarque.** On montre de même que  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ .

**Proposition 1.8** (Formule de polarisation)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $(x, y) \in E^2$ , alors  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ .

*Démonstration.* D'après l'identité remarquable,  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ , isoler  $\langle x, y \rangle$  donne alors directement le résultat. □

**Remarque.** Connaître les valeurs de la norme permet donc de retrouver le produit scalaire associé, si nécessaire.

**Remarque.** En combinant les formules de  $\|x + y\|^2$  et  $\|x - y\|^2$ , on montre aussi  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ .

**Proposition 1.9** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $(x, y) \in E^2$ , alors  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ , avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

*Démonstration.* Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'identité remarquable précédente et les propriétés du produit scalaire donnent :

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2.$$

— Si  $\|y\| = 0$ , alors  $y = 0_E$ . Donc  $|\langle x, y \rangle| = 0 = \|x\| \|y\|$ .

— Si  $\|y\| \neq 0$ , la fonction  $t \mapsto \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2$  est polynomiale de degré 2 et positive sur  $\mathbb{R}$  tout entier, donc son discriminant est négatif. Cela donne  $4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ , donc  $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$  et par passage à la racine (croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ),  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .

Il y a alors égalité si et seulement si le discriminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si la fonction  $t \mapsto \|x + ty\|^2$  s'annule. Cette annulation est équivalente à l'existence d'un réel  $t_0 \in \mathbb{R}$  pour lequel  $x + t_0y = 0_E$ , c'est-à-dire à la colinéarité de  $x$  et  $y$ .

□

**Remarque.** Si nous avons défini le produit scalaire comme au lycée, à partir de normes et d'angles, l'inégalité de Cauchy-Schwarz serait immédiate :  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ .

**Exercice 2.** Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$  et étudier le cas d'égalité.

Solution : On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(1, \dots, 1)$  pour  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2}.$$

Un passage au carré donne alors  $\left(\sum_{i=1}^n 1 \times x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$ . Et il y a égalité si et seulement si  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(1, \dots, 1)$  sont colinéaires, c'est-à-dire quand les  $x_i$  sont tous égaux.

**Exercice 3.** Montrer que pour toute fonction  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $f(1)^2 - f(0)^2 \leq 2\sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$ .

Solution : On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $f$  et  $f'$  dans l'espace préhilbertien réel  $C([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel :

$$\left| \int_0^1 f(t)f'(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}.$$

Or  $\int_0^1 f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f(t)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{f(1)^2 - f(0)^2}{2}$ , d'où le résultat annoncé.

### Proposition 1.10 (Inégalité triangulaire)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $(x, y) \in E^2$ , alors  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires et de même sens.

*Démonstration.* Les propriétés de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

La croissance de la racine carrée sur  $\mathbb{R}_+$  donne alors  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Étudions maintenant le cas d'égalité. Il y a égalité si et seulement si  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$ , reste à trouver les  $x$  et  $y$  auxquels ça correspond.

— Supposons  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$  : d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires. Quitte à les permuter, on peut supposer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $y = \lambda x$ . On obtient alors d'une part :

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2,$$

et d'autre part :

$$\|x\| \|y\| = \|x\| \|\lambda x\| = \|x\| \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \|x\| \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|^2.$$

Donc soit  $x$  est nul, soit  $\lambda = |\lambda|$ , c'est-à-dire  $\lambda \geq 0$ . Dans les deux cas,  $x$  et  $y$  sont colinéaires de même sens.

— Réciproquement, si  $x$  et  $y$  sont colinéaires de même sens, il est immédiat que l'égalité est vérifiée.  $\square$

## 2 Orthogonalité

### 2.1 Premières définitions et propriétés

#### Définition 2.1 (Vecteurs orthogonaux)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $(x, y) \in E^2$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** et on note  $x \perp y$  lorsque  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Remarque.** Soit  $x \in E$ , alors  $x \perp x \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_E$ , donc le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.

**Remarque.** Dans ce chapitre, la notion d'orthogonalité dépend du produit scalaire pour lequel elle est définie, et ne correspond donc pas toujours à la définition géométrique vue au lycée.

**Définition 2.2** (Orthogonal d'une partie)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $X$  une partie de  $E$ . On appelle **orthogonal** de  $X$ , noté  $X^\perp$ , l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de  $X$  :

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X, \langle y, x \rangle = 0\}.$$

**Proposition 2.3** (L'orthogonal est un sous-espace vectoriel)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $X$  une partie de  $E$ , alors  $X^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

*Démonstration.*

—  $\forall x \in X, \langle x, 0_E \rangle = 0$ , donc  $0_E \in X^\perp$ .

— Soit  $(y, z) \in (X^\perp)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $\forall x \in X, \langle \lambda y + z, x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle = \lambda \times 0 + 0 = 0$ . Donc  $\lambda y + z \in X^\perp$ .

Donc  $X^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . □

**Proposition 2.4** (Autres propriétés de l'orthogonal)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $X$  une partie de  $E$ . Alors  $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$  et  $X \subset X^{\perp\perp}$ .

*Démonstration.* Si un vecteur est orthogonal à tous les éléments de  $\text{Vect}(X)$ , il est en particulier orthogonal aux éléments de  $X$ , donc  $\text{Vect}(X)^\perp \subset X^\perp$ . Réciproquement, si un vecteur est orthogonal aux éléments de  $X$ , par linéarité à droite (ou à gauche) du produit scalaire, il est orthogonal à toutes les combinaisons linéaires d'éléments de  $X$ , donc à  $\text{Vect}(X)$ . Donc  $X^\perp \subset \text{Vect}(X)^\perp$ . Donc par double inclusion,  $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$ .

Pour le deuxième point : Soit  $x \in X$ , alors  $\forall y \in X^\perp, \langle x, y \rangle = 0$ . Donc  $x \in (X^\perp)^\perp$ . Donc  $X \subset X^{\perp\perp}$ . □

**Remarque.** L'égalité  $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$  signifie que pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel, il est suffisant d'exiger l'orthogonalité aux éléments d'une famille génératrice.

**Remarque.** Contrairement aux apparences, dans le cas général,  $X^{\perp\perp} \neq X$ . D'ailleurs,  $X$  n'est pas nécessairement un espace vectoriel alors que  $X^{\perp\perp}$  en est un.

**Exemple.** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, alors  $\{0_E\}^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0_E\}$ . En effet,  $0_E$  est le seul vecteur de  $E$  orthogonal à tout vecteur.

**Exercice 4.** Soit  $E = \mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire canonique et  $X = \text{Vect}((1, 1))$ . Déterminer  $X^\perp$ .

Solution : Soit  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , alors :

$$u \in X^\perp \iff u \in \text{Vect}((1, 1))^\perp \iff u \in \{(1, 1)\}^\perp \iff \langle (u_1, u_2), (1, 1) \rangle = 0 \iff u_1 + u_2 = 0.$$

On en déduit :

$$u \in X^\perp \iff u = (u_1, -u_1) \iff u = u_1(1, -1) \iff u \in \text{Vect}((1, -1)).$$

Donc  $X^\perp = \text{Vect}((1, -1))$ .

**Définition 2.5** (Familles orthogonales ou orthonormées)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel. On dit qu'une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs est

— **orthogonale** lorsque pour tous  $(i, j) \in I^2$  tels que  $i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle = 0$ .

— **orthonormée (ou orthonormale)** lorsqu'elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, c'est-à-dire lorsque pour tous  $(i, j) \in I^2, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**Exemple.** Pour le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , la base canonique  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$  est orthonormale. En effet,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**Exercice 5.** Pour le produit scalaire  $(X, Y) \mapsto X^\top \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$  sur  $\mathbb{R}^2$ , montrer que la base canonique n'est pas orthonormale, mais que la famille  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$  l'est.

Solution : On calcule  $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ , donc la base canonique n'est pas orthonormale (elle n'est même pas orthogonale). Par contre :

$$\begin{aligned} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{12}} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0, \\ - \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{2} = 1, \\ - \left\| \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2 &= \frac{1}{6} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{1}{6} (1 \ -2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} (1 \ -2) \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{6}{6} = 1. \end{aligned}$$

Donc la famille  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$  est orthonormale.

**Exercice 6.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $s_n : t \mapsto \sin(nt)$ . Montrer que  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est orthonormale dans  $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$  pour le produit scalaire  $(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ .

Solution : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , les formules trigonométriques donnent :

$$\|s_n\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2nt)}{2} dt = 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(2nt)}{4n} \right]_0^{2\pi} = 1.$$

Soit  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$  avec  $n \neq m$ , on trouve de même :

$$\langle s_m, s_n \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(mt) \sin(nt)}{\pi} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos((m-n)t) - \cos((m+n)t)}{2\pi} dt = \left[ \frac{\sin((m-n)t)}{2\pi(m-n)} - \frac{\sin((m+n)t)}{2\pi(m+n)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

La famille est donc bien orthonormée.

**Proposition 2.6** (Familles orthogonales et liberté)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel. Toute famille orthogonale de vecteurs de  $E$  non nuls est libre.

*Démonstration.* Soient  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale de vecteurs de  $E$  non nuls et soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . On suppose  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$ . Alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$0 = \langle 0_E, x_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, x_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x_k, x_i \rangle = \lambda_i \|x_i\|^2.$$

Or  $\|x_i\| \neq 0$  puisque  $x_i \neq 0_E$ , donc :  $\lambda_i = 0$ . Donc  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille libre. □

**Remarque.** En particulier, toute famille orthonormale de vecteurs de  $E$  est libre (les vecteurs étant unitaires, ils ne peuvent pas être nuls).

**Proposition 2.7** (Théorème de Pythagore)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel. Soit  $(x, y) \in E^2$ , alors :  $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

*Démonstration.* On sait que  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$  (identité remarquable). Donc :

$$x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

**Remarque.** Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille orthogonale de  $E$ , alors on a de même  $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$ .

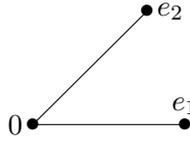
## 2.2 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

### Proposition 2.8 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

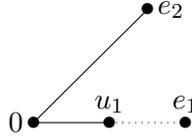
Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$ . On peut transformer  $(e_1, \dots, e_n)$  en une famille orthonormale de  $E$   $(u_1, \dots, u_n)$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

**Exemple.** Soit  $(e_1, e_2)$  une famille libre de  $E$ , qu'on souhaite transformer en famille orthonormée.



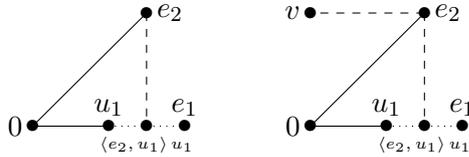
- On vérifie que  $\|e_1\| \neq 0$ , puis on pose  $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ . Ainsi,  $u_1$  est une famille orthonormale (on vient de normer le vecteur) et  $\text{Vect}(u_1) = \text{Vect}(e_1)$ .



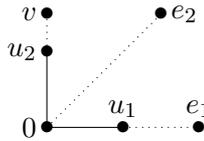
- Il faut maintenant construire un vecteur orthogonal à  $u_1$ . Pour cela, on pose  $v = e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1$ . On a bien :

$$\langle v, u_1 \rangle = \langle e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1, u_1 \rangle = \langle e_2, u_1 \rangle - \langle e_2, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle = \langle e_2, u_1 \rangle - \langle e_2, u_1 \rangle 1 = 0.$$

De plus  $\text{Vect}(u_1, v) = \text{Vect}(u_1, e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1) = \text{Vect}(u_1, e_2) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ .



- On vérifie que  $\|v\| \neq 0$ , puis on pose  $u_2 = \frac{v}{\|v\|}$ , pour créer un vecteur unitaire conservant les propriétés précédentes.



On a donc bien construit une famille orthonormale  $(u_1, u_2)$ .

*Démonstration.* Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $P(k)$  : « il existe une famille orthonormale de  $E$   $(u_1, \dots, u_k)$  telle que  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  ».

- $(e_1)$  est libre, donc  $e_1 \neq 0_E$ , ce qui permet de poser  $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ . Par construction,  $u_1$  est unitaire et  $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$ , donc  $P(1)$  est vraie.

- Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Supposons que  $P(k-1)$  est vraie. Alors il existe une famille orthonormale  $(u_1, \dots, u_{k-1})$  pour laquelle  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$ .

On pose  $v_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i$ . Comme  $(e_1, \dots, e_k)$  est libre,  $v_k \neq 0_E$  (sinon  $e_k$  serait combinaison linéaire de  $(u_1, \dots, u_{k-1})$  et donc de  $(e_1, \dots, e_{k-1})$ ). On peut ainsi poser  $u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$  (ou son opposé).

Montrons que la famille  $(u_1, \dots, u_k)$  est orthonormale. On sait que  $(u_1, \dots, u_{k-1})$  l'est. De plus,  $u_k$  est unitaire. Il suffit donc de montrer que  $u_k$  est orthogonal à  $u_1, \dots, u_{k-1}$ . Soit  $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ , on a bien :

$$\langle u_k, u_j \rangle = \frac{1}{\|v_k\|} \langle v_k, u_j \rangle = \frac{1}{\|v_k\|} \left\langle e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \frac{1}{\|v_k\|} (\langle e_k, u_j \rangle - \langle e_k, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle) = 0.$$

Enfin, par hypothèse de récurrence,  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}, u_k)$ . Or  $u_k$  est combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_{k-1}$  et  $e_k$  avec un coefficient non nul devant  $e_k$ , donc :  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .  
Donc  $P(k)$  est vraie.

Donc  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(k)$  est vrai, ce qui montre le résultat annoncé.  $\square$

**Remarque.** La démonstration fournit une méthode de construction récursive :

$$\text{poser } u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \text{ puis pour tout } k \in \llbracket 2, n \rrbracket, u_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i \right\|}.$$

**Exercice 7.** On se place sur  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ . Déterminer une base orthonormale  $(P_0, P_1, P_2)$ .

**Solution :** On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille libre (car base canonique)  $(1, X, X^2)$  :

- $\|1\|^2 = \int_0^1 1^2 dt = 1$ , on pose donc  $P_0(X) = \frac{1}{\|1\|} = 1$ .
- On pose  $Q(X) = X - \langle X, P_0(X) \rangle P_0(X)$ . Comme  $\langle X, P_0(X) \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ , on trouve  $Q(X) = X - \frac{1}{2}$ . De plus,  $\|Q(X)\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}$ , on pose donc  $P_1(X) = \frac{Q(X)}{\|Q(X)\|} = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$ .
- On pose  $T(X) = X^2 - \langle X^2, P_0(X) \rangle P_0(X) - \langle X^2, P_1(X) \rangle P_1(X)$ . Comme  $\langle X^2, P_0(X) \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$  et  $\langle X^2, P_1(X) \rangle = \int_0^1 t^2 \times \sqrt{3}(2t - 1) dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ , on trouve  $T(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$ . De plus,

$$\|T(X)\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 t^4 - 2t^3 + \frac{4t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36} dt = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{5 \times 6^2}.$$

On pose donc  $P_2(X) = \frac{T(X)}{\|T(X)\|} = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$ .

L'algorithme de Gram-Schmidt garantit que la famille  $(P_0, P_1, P_2)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

## 2.3 Bases orthonormées

**Proposition 2.9** (Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $E$  possède une base orthonormale.

*Démonstration.*  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie non nulle, donc possède une base. Il suffit de l'orthonormaliser par l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale.  $\square$

**Proposition 2.10** (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Toute famille orthonormale de  $E$  peut être complétée en une base orthonormale de  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille orthonormale, donc libre, de  $E$ . Comme  $E$  est de dimension finie non nulle, le théorème de la base incomplète permet de la compléter en une base de  $E$ . On orthonormalise ensuite cette base par l'algorithme de Gram-Schmidt. Par construction, les premiers vecteurs  $e_1, \dots, e_p$  ne seront pas affectés (puisqu'ils forment déjà une famille orthonormale). On a donc complété  $(e_1, \dots, e_p)$  en une base orthonormale de  $E$ .  $\square$

**Proposition 2.11** (Coordonnées dans une base orthonormée)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$  et  $x \in E$ .

Alors les coordonnées de  $x$  dans  $(e_1, \dots, e_n)$  sont  $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$ . Autrement dit,  $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ .

*Démonstration.* On pose  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ik} = x_k.$$

□

**Proposition 2.12** (Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x, y) \in E^2$  de coordonnées respectives  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  dans une base orthonormale  $B$  de  $E$ . Alors  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  et  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ .

*Démonstration.* On note  $B = (e_1, \dots, e_n)$ . On a alors :

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Le résultat sur la norme découle alors de la relation  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . □

**Remarque.** Attention, ces formules sont fausses dans le cas général (pour des coordonnées dans une base non orthonormée).

**Remarque.** Sous forme matricielle, avec des vecteurs colonnes de coordonnées dans une base orthonormale  $X$  et  $Y$ , cela donne  $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$  et  $\|X\| = \sqrt{X^\top X}$ .

### 3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

#### 3.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace

**Proposition 3.1** (Somme directe avec l'orthogonal)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe.

*Démonstration.* Comme  $F$  et  $F^\perp$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , on a  $\{0_E\} \subset F \cap F^\perp$ . Réciproquement, soit  $x \in F \cap F^\perp$ . Alors  $x \perp x$ , donc  $\langle x, x \rangle = 0$ . Par propriétés du produit scalaire, on en déduit  $x = 0_E$ . Donc  $F \cap F^\perp \subset \{0_E\}$ . Donc par double inclusion  $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ . □

**Remarque.** Attention : on a montré que  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe, mais ils ne sont pas nécessairement supplémentaires dans  $E$ .

**Définition 3.2** (Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Il existe un unique supplémentaire de  $F$  dans  $E$  orthogonal à  $F$ , et c'est  $F^\perp$ . On l'appelle donc **le supplémentaire orthogonal** de  $F$  dans  $E$  et on note :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

*Démonstration.* Si  $F = \{0_E\}$ ,  $F^\perp = E$  et le résultat est immédiat.

Dans le cas contraire, comme  $F$  est de dimension finie, il possède une base orthonormale  $(f_1, \dots, f_n)$ . On sait déjà que  $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ , il reste à montrer que  $E = F + F^\perp$ . L'inclusion  $F + F^\perp \subset E$  est immédiate, montrons  $E \subset F + F^\perp$ . Soit  $x \in E$ , alors  $x = (\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k) + (x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k)$ , avec  $\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \in F$ . De plus, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k, f_i \right\rangle = \langle x, f_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle \langle f_k, f_i \rangle = \langle x, f_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle \delta_{ki} = \langle x, f_i \rangle - \langle x, f_i \rangle = 0.$$

Donc  $x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$  est orthogonal à  $f_1, \dots, f_n$ , donc élément de  $\{f_1, \dots, f_n\}^\perp = F^\perp$ . La décomposition précédente donne donc  $x \in F + F^\perp$ , ce qu'on voulait. Donc  $E = F \oplus F^\perp$ .

Montrons maintenant l'unicité. Soit  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  orthogonal à  $F$ .

— Soit  $x \in G$ , alors  $\forall f \in F, \langle x, f \rangle = 0$ , donc  $x \in F^\perp$ . Donc  $G \subset F^\perp$

— Réciproquement, soit  $x \in F^\perp$ . Comme  $E = F + G$ , il existe  $f \in F$  et  $g \in G$  tels que  $x = f + g$ . On a alors  $\langle f, f \rangle = \langle f, f \rangle + \langle g, f \rangle = \langle f + g, f \rangle = \langle x, f \rangle = 0$ . Par propriété du produit scalaire, on en déduit  $f = 0_E$ , donc  $x = g \in G$ . Donc  $F^\perp \subset G$ .

Donc par double inclusion,  $G = F^\perp$ . D'où l'unicité.  $\square$

**Remarque.** Attention :  $F$  doit être de dimension finie pour que ce résultat s'applique.

**Remarque.** En particulier, si  $E$  lui-même est de dimension finie :  $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ .

**Remarque.** Il existe un unique supplémentaire orthogonal, mais de nombreux supplémentaires « tout court ».

**Proposition 3.3** (Cas particulier d'un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. Alors  $F^{\perp\perp} = F$ .

*Démonstration.* On sait déjà que  $F \subset F^{\perp\perp}$ . Soit  $x \in F^{\perp\perp}$ , comme  $E = F \oplus F^\perp$ , il existe  $f \in F$  et  $g \in F^\perp$  tels que  $x = f + g$ . En particulier  $f \perp g$  donc  $\langle g, g \rangle = \langle g, g \rangle + \langle f, g \rangle = \langle f + g, g \rangle = \langle x, g \rangle = 0$ , où la dernière égalité est vraie car  $x \in F^{\perp\perp}$ . Le produit scalaire étant défini positif, on en déduit que  $g = 0_E$  et donc  $x = f \in F$ . Donc  $F^{\perp\perp} \subset F$  et on conclut par double inclusion.  $\square$

**Exercice 8.** Dans l'espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^4$ , on s'intéresse au plan vectoriel  $P$  d'équations :  $x - y - z - t = 0$  et  $2x + y + z - t = 0$ . Déterminer son supplémentaire orthogonal.

Solution : On commence par constater que :

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \langle (1, -1, -1, -1), (x, y, z, t) \rangle = 0 \text{ et } \langle (2, 1, 1, -1), (x, y, z, t) \rangle = 0\} \\ &= \{(1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1)\}^\perp \\ P &= \text{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))^\perp \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{R}^4$  est euclidien, donc  $P^\perp = \text{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))^{\perp\perp} = \text{Vect}((1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -1))$ .

**Définition 3.4** (Vecteur normal à un hyperplan)

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $H$  un hyperplan de  $E$ . Le sous-espace  $H^\perp$  est une droite dont tout vecteur non nul est appelé **vecteur normal** à  $H$ .

*Démonstration.* Comme  $E$  est de dimension finie,  $E = H \oplus H^\perp$  donc  $\dim(E) = \dim(H) + \dim(H^\perp)$ . Comme  $H$  est un hyperplan, on en déduit  $\dim(H^\perp) = 1$ ,  $H^\perp$  est donc bien une droite vectorielle.  $\square$

**Remarque.** Soit  $a$  un vecteur normal à l'hyperplan  $H$ , alors  $H = \{a\}^\perp = \{x \in E \mid \langle x, a \rangle = 0\}$ . Donc  $H$  est le noyau de la forme linéaire non nulle  $x \mapsto \langle x, a \rangle$ .

### 3.2 Projections orthogonales et propriétés

**Définition 3.5** (Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. On appelle **projection orthogonale** sur  $F$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**Remarque.** Comme  $F$  est de dimension finie, on a bien  $E = F \oplus F^\perp$ , ce qui permet de définir le projecteur associé.

**Proposition 3.6** (Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée)

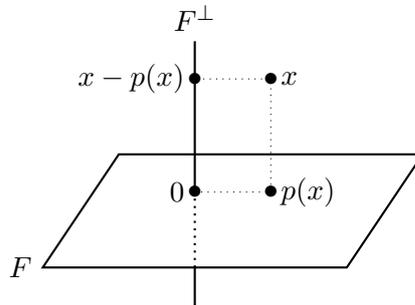
Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une base orthonormée de  $F$ . On note  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors  $\forall x \in E$ ,  $p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in E$ . On a montré dans la démonstration d'existence du supplémentaire orthogonal que  $x = \left( \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \right) + \left( x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \right)$ , avec  $\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \in F$  et  $x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \in F^\perp$ .

Donc  $p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$ . □

**Remarque.** Quand on dispose des coordonnées dans une base orthonormée, on obtient donc facilement les projetés orthogonaux. Dans le cas contraire, on a deux stratégies de calcul :

- Première possibilité : construire (avec Gram-Schmidt) une base orthonormée et se ramener à la formule.
- Deuxième possibilité : utiliser les relations  $p(x) \in F$  et  $x - p(x) \in F^\perp$ .



**Exercice 9.** Soit  $F = \text{Vect}(\sin, \cos)$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ . Déterminer le projeté orthogonal de  $\text{id}$  sur  $F$  pour le produit scalaire  $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ .

Solution : On s'intéresse tout d'abord à la famille  $(\sin, \cos)$ , pour déterminer si c'est une base orthonormée :

- $\langle \sin, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \left[ \frac{\sin^2(t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$ . Donc la famille  $(\sin, \cos)$  est orthogonale.
- $\|\sin\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$ .
- $\|\cos\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$ .

Pour la suite, on aura aussi besoin des valeurs de  $\langle \text{id}, \cos \rangle$  et  $\langle \text{id}, \sin \rangle$ , que l'on calcule donc en prévision. Une intégration par parties (les fonctions étant de classe  $C^1$  sur  $[0, 2\pi]$ ) donne :

$$\int_0^{2\pi} t e^{it} dt = \left[ t \frac{e^{it}}{i} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{i} dt = -2i\pi + i \left[ \frac{e^{it}}{i} \right]_0^{2\pi} = -2i\pi + 0 = -2i\pi,$$

donc  $\langle \text{id}, \sin \rangle = \int_0^{2\pi} t \sin(t) dt = \text{Im} \left( \int_0^{2\pi} t e^{it} dt \right) = \text{Im}(-2i\pi) = -2\pi$  et  $\langle \text{id}, \cos \rangle = \text{Re} \left( \int_0^{2\pi} t e^{it} dt \right) = \text{Re}(-2i\pi) = 0$ .

On compare maintenant les deux stratégies de calcul disponibles :

- Première stratégie : on orthonormalise cette base de  $F$  par Gram-Schmidt. Cette famille étant déjà orthogonale,  $\left( \frac{\sin}{\|\sin\|}, \frac{\cos}{\|\cos\|} \right) = \left( \frac{\sin}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} \right)$  est une base orthonormale de  $F$ . Le projeté orthogonal de  $\text{id}$  sur  $F$  est donc :

$$\left\langle \text{id}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} + \left\langle \text{id}, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} = \frac{\langle \text{id}, \sin \rangle}{\pi} \sin + \frac{\langle \text{id}, \cos \rangle}{\pi} \cos = -2 \sin.$$

- Deuxième stratégie : on note  $p(\text{id})$  le projeté orthogonal de  $\text{id}$  sur  $F$  et  $(\lambda, \mu)$  ses coordonnées dans la base  $(\sin, \cos)$  de  $F$ . Alors  $p(\text{id}) = \lambda \sin + \mu \cos$ . Or on sait que  $\text{id} - p(\text{id}) \in F^\perp$ , ce qui donne deux relations :

$$0 = \langle \text{id} - p(\text{id}), \sin \rangle = \langle \text{id} - \lambda \sin - \mu \cos, \sin \rangle = \langle \text{id}, \sin \rangle - \lambda \|\sin\|^2 - \mu \langle \cos, \sin \rangle = -2\pi - \lambda\pi,$$

$$0 = \langle \text{id} - p(\text{id}), \cos \rangle = \langle \text{id} - \lambda \sin - \mu \cos, \cos \rangle = \langle \text{id}, \cos \rangle - \lambda \langle \sin, \cos \rangle - \mu \|\cos\|^2 = -\mu\pi.$$

Résoudre ce système donne  $\lambda = -2$  et  $\mu = 0$ , et donc  $p(\text{id}) = -2 \sin$ .

**Remarque.** De manière générale, quand on se trouve dans un espace euclidien et qu'on veut projeter orthogonalement sur un sous-espace  $F$ , on préfère :

- projeter directement sur  $F$  si  $\dim(F) \leq \dim(F^\perp)$ ,
- projeter d'abord sur  $F^\perp$  sinon.

**Exercice 10.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $a$ . On note  $p$  la projection orthogonale sur  $H$ . Soit  $x \in E$ , déterminer  $p(x)$ .

**Solution :** Notons  $p_a$  la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(a) = H^\perp$ . On sait que  $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$  est une base orthonormale de  $\text{Vect}(a)$ , donc  $p_a(x) = \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$ . Or  $p$  et  $p_a$  sont des projecteurs associés, donc  $p + p_a = \text{id}_E$ . On en déduit que  $p(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$ .

### 3.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

#### Définition 3.7 (Distance à une partie)

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel,  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$ . On appelle **distance** de  $x$  à  $A$ , notée  $d(x, A)$ , le réel  $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .

*Démonstration.* L'ensemble  $\{\|x - a\| \mid a \in A\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide (car  $A \neq \emptyset$ ) et minorée par 0. Par propriété de la borne inférieure, le réel  $d(x, A)$  est donc bien défini.  $\square$

**Remarque.** Intuitivement, la distance d'un vecteur  $x$  à une partie  $A$  est la plus petite distance séparant  $x$  d'un élément de  $A$ . On utilise une borne inférieure et pas un minimum pour éviter de se poser la question de l'existence de cette plus petite distance.

#### Proposition 3.8 (Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace préhilbertien réel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie et  $x \in E$ . Alors la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$ , notée  $p(x)$ , est l'unique élément de  $F$  qui réalise la distance de  $x$  à  $F$ . En particulier,  $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ .

*Démonstration.* Soit  $f \in F$ , alors  $x - f = (x - p(x)) + (p(x) - f)$ . Or  $x - p(x) \in \text{Ker}(p) = F^\perp$  et  $p(x) - f \in \text{Im}(p) = F$ , donc d'après le théorème de Pythagore,  $\|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2$ .

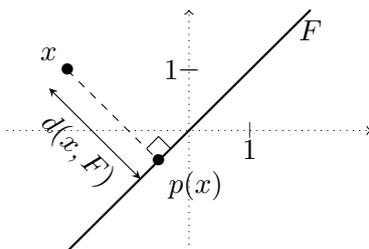
On pose  $D = \{\|x - f\| \mid f \in F\}$ , alors :

- $\|x - p(x)\| \in D$  puisque  $p(x) \in F$ .
- par le calcul précédent,  $\forall f \in F, \|x - f\| = \sqrt{\|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2} \geq \|x - p(x)\|$ . Donc  $D$  est minoré par  $\|x - p(x)\|$ .

Donc  $\|x - p(x)\| = \min(D)$ , ce qui garantit que  $\|x - p(x)\| = \inf(D) = d(x, F)$ .

Enfin, pour tout  $f \in F \setminus \{p(x)\}$ ,  $\|x - f\| = \sqrt{\|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2} > \|x - p(x)\|$  car  $p(x) - f \neq 0$ , donc par propriété de la norme  $\|p(x) - f\| > 0$ . La distance  $d(x, F)$  n'est donc atteinte qu'en  $p(x)$ .  $\square$

**Exemple.** Représentation graphique dans le cas de  $\mathbb{R}^2$  et du produit scalaire usuel :



**Remarque.** Si  $E$  est un espace euclidien,  $x - p(x)$  correspond au projeté orthogonal de  $x$  sur  $F^\perp$ , ce qui peut donner un calcul plus rapide.