Rudiments de logique

Cours de É. Bouchet – PCSI

30 juin 2025

Table des matières

1 Généralités et rappels

1.1 Propositions, négations et connecteurs

Définition 1.1 (Proposition)

Une **proposition** (ou **assertion**) est une phrase mathématique qui est soit vraie (V) soit fausse (F).

Exemple. « 3 » n'est ni vrai ni faux : ce n'est pas une proposition.
La proposition P_1 : « $3 \geqslant 10$ » est fausse.
La proposition P_2 : « la fonction $x \mapsto x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$ » est vraie.

Définition 1.2 (Négation d'une proposition)

Soit P une proposition. On appelle **négation de** P, notée non(P), la proposition définie par :
— non(P) est vraie si P est fausse,
— non(P) est fausse si P est vraie.

Remarque. Cette définition se résume par la table de vérité suivante :

P	**non(P)**
V	**F**
F	**V**

Exemple. non(P_1) est « $3 < 10$ », ce qui est vrai.
non(P_2) est « la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas positive sur $\mathbb{R}$ », ce qui est faux.

Définition 1.3 (P et Q, P ou Q)

Soit P et Q deux propositions.
— la proposition (P et Q) est vraie quand les phrases P et Q sont toutes les deux vraies ;
— la proposition (P ou Q) est vraie quand au moins l'une des phrases P ou Q est vraie.

Remarque. Ces définitions se résument par les tables de vérité suivantes :

P	Q		P et Q	P ou Q
V	V		**V**	**V**
V	F		**F**	**V**
F	V		**F**	**V**
F	F		**F**	**F**

Exemple. La proposition (P_1 et P_2) est fausse, alors que (P_1 ou P_2) est vraie.

Remarque. Attention : le « ou » mathématique diffère du « ou » utilisé habituellement en français. Si un restaurant propose « fromage ou dessert », on a rarement le droit de choisir les deux...

Proposition 1.4 (Négation de et/ou)

Si P et Q sont des propositions, alors :
— la négation de (P et Q) est (non(P) ou non(Q)),
— la négation de (P ou Q) est (non(P) et non(Q)).

Exercice 1. Déterminer la négation de « on est lundi et c'est le matin ».

Exercice 2. Soit n un entier naturel. Déterminer la négation de « n est pair ou $n > 9$ ».

1.2 Implication, équivalence

Définition 1.5 (Implication, réciproque)

Soit P et Q des propositions, on définit la proposition $P \Rightarrow Q$ par la table de vérité suivante :

P	Q		$P \Rightarrow Q$
V	V		**V**
V	F		**F**
F	V		**V**
F	F		**V**

On appelle **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$ l'implication $Q \Rightarrow P$.

Exercice 3. Soit x un réel, déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses :

1. $x \geqslant 0 \Rightarrow x+1 \geqslant 0$,
2. $x+1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$.

Exercice 4. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et x, y deux réels. Déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses :

1. $x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$,
2. $f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x \geqslant y$.

Remarque. La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $\big(P \,\text{et}\, \text{non}(Q)\big)$.

Remarque. Attention à ne pas confondre $(P \Rightarrow Q)$ et (P donc Q). Dans le premier cas, on dit que si P est vrai, alors Q le sera aussi. Dans le second cas, on affirme que P est vrai et on en déduit que Q l'est aussi.

Définition 1.6 (Condition nécessaire ou suffisante)

Soit P et Q des propositions, si $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que :
- P est une **condition suffisante** pour avoir Q,
- Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.

Définition 1.7 (Équivalence)

Soit P et Q des propositions. On note $P \Leftrightarrow Q$ la proposition $((P \Rightarrow Q) \,\text{et}\, (Q \Rightarrow P))$.
Elle se lit « P **si et seulement si** Q », souvent abrégé « P **ssi** Q ».

Remarque. Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q (et inversement).

Remarque. Le raisonnement par équivalence est particulièrement utile quand on cherche à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème (alors qu'on raisonne par déductions quand on cherche juste à montrer quelque chose).

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des solutions x réelles de l'équation $x^2 - x = 0$.

1.3 Quantificateurs

Définition 1.8 ($\forall$,$\exists$)

Soit E un ensemble et P une propriété.
On écrit $\forall x \in E,\ P(x)$ quand P est vraie pour tout élément x dans E.
On écrit $\exists x \in E,\ P(x)$ quand il existe au moins un x dans E pour lequel P est vraie.
On écrit $\exists! x \in E,\ P(x)$ quand il existe exactement un x dans E pour lequel P est vraie.

Remarque. Les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont en aucun cas des abréviations. Ils ne doivent jamais être utilisés dans une phrase en français pour remplacer « pour tout » ou « il existe ».

Exemple. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \neq -1$ car le carré d'un réel est toujours positif.
Par contre, $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -1$ car par exemple $i^2 = -1$.

Exercice 6. Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \geqslant 3$ et $\dfrac{1}{x} \leqslant 0,1$.

Remarque. On peut permuter les quantificateurs $\forall$ entre eux et les quantificateurs $\exists$ entre eux. Dans le cas général, il est cependant interdit de permuter un $\forall$ et un $\exists$.

Exemple. $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = y$ est une assertion vraie : pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $x = \sqrt{y}$ convient.
$\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $x^2 = y$ est une assertion fausse par contre : il faudrait que ce soit le même réel x qui, mis au carré, vaille plusieurs valeurs de y différentes, c'est impossible.

Proposition 1.9 (Négation des quantificateurs)

Soit E un ensemble, on a :

$$\mathrm{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \mathrm{non}(P(x)),$$

et

$$\mathrm{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \mathrm{non}(P(x)).$$

Exercice 7. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 9x + 20$. Montrer que f n'est pas une fonction positive.

2 Les différents modes de raisonnement

2.1 Raisonnement par disjonction des cas

Définition 2.1 (Principe du raisonnement par disjonction de cas)

Raisonner par **disjonction de cas** pour démontrer une propriété P consiste en la décomposer en un nombre fini de cas vérifiés séparément.

Exercice 8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Exercice 9. Soit x et y deux réels fixés. Montrer que $\max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$.

2.2 Raisonnement par récurrence

2.2.1 Récurrence simple

Proposition 2.2 (Principe de récurrence)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Soit n_0 un entier. Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 10. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $0 + 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.2.2 Récurrence double

Proposition 2.3 (Récurrence double)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Soit n_0 un entier. Si $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 11. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

2.2.3 Récurrence forte

Proposition 2.4 (Récurrence forte)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Soit n_0 un entier. Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $(\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 12. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$.

2.3 Raisonnement par contraposition

Définition 2.5 (Contraposée)

Soit P et Q deux propositions. La **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication non$(Q) \Rightarrow$ non(P).

Exemple. La contraposée de « si on est en hiver, le professeur porte des chaussettes » est « si le professeur ne porte pas de chaussettes, on n'est pas en hiver ».

Proposition 2.6 (Principe du raisonnement par contraposition)

Soit P et Q deux propositions, on a alors :

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))\,.$$

Exercice 13. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, (n^2 est pair) $\Rightarrow$ (n est pair).

2.4 Raisonnement par l'absurde

Proposition 2.7 (Principe du raisonnement par l'absurde)

Soit P une proposition. Si en supposant que P est fausse, on déduit une contradiction, alors P est vraie.

Exercice 14. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, dont on admet qu'elle est bien définie et à valeurs strictement positives. Montrer qu'elle diverge.

2.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Définition 2.8 (Principe du raisonnement par analyse-synthèse)

Le raisonnement par analyse-synthèse sert à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème. Il se rédige en deux étapes :

— **L'analyse :** correspond au sens direct d'un raisonnement par équivalences. On étudie une solution, en supposant son existence. Le but est d'obtenir un maximum d'informations à son sujet, pour se ramener à un nombre limité de candidats.

— **La synthèse :** correspond à la réciproque d'un raisonnement par équivalences. On étudie séparément chacun des candidats de l'analyse pour vérifier s'ils sont solution ou non du problème.

Remarque. L'analyse permet de déterminer des conditions nécessaires à la résolution du problème, la synthèse permet ensuite de vérifier si ces conditions sont suffisantes.

Remarque. Le plus souvent, on raisonne par analyse-synthèse quand on cherche toutes les solutions d'un problème mais qu'un raisonnement par équivalences est impossible (ou compliqué).

Exercice 15. Déterminer les solutions réelles x de l'équation (E) : $\sqrt{6+x} = x$.

Exercice 16. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$