

**Exercice 1 (★).** On tire 4 cartes dans un jeu. Donner la négation des affirmations suivantes :

1. Les quatre cartes sont rouges.
2. Il y a au moins deux cœurs.
3. Il n'y a aucun pique ou que des piques.
4. Il y a au moins un pique et un cœur.

**Exercice 2 (★).** Soit  $n$  un entier naturel. Traduire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1.  $n$  est un multiple de 5.
2.  $n$  n'est pas un multiple de 3.

**Exercice 3 (★).** Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction  $f$  s'annule au moins une fois.
2. La fonction  $f$  est la fonction nulle.
3. La fonction  $f$  est constante.
4. La fonction  $f$  est paire.

**Exercice 4 (★★).** Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction  $f$  n'est pas impaire.
2. La fonction  $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur.
3. L'équation  $f(x) = 2$  admet au moins deux solutions distinctes.
4. La fonction  $f$  n'est pas majorée.

**Exercice 5 (★).** Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera chaque réponse.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1) \Rightarrow (e^x \geq 1)$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 1) \Leftrightarrow (e^x \geq 1)$
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \Rightarrow (x^2 \geq y^2)$
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq y) \Leftrightarrow (x^2 \geq y^2)$
5.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x = y) \Rightarrow (\cos(x) = \cos(y))$
6.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x = y) \Leftrightarrow (\cos(x) = \cos(y))$
7.  $\forall m \in \mathbb{N}, (m \text{ pair}) \Rightarrow (m \text{ multiple de } 6)$
8.  $\forall m \in \mathbb{N}, (m \text{ pair}) \Leftrightarrow (m \text{ multiple de } 6)$
9.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (\cos(x) = \cos(y)) \Rightarrow (x^2 = y^2)$
10.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (\cos(x) = \cos(y)) \Leftrightarrow (x^2 = y^2)$

**Exercice 6 (★).** Déterminer l'ensemble (noté  $D$ ) des réels  $t$  tels que les nombres  $\frac{t^2 + 2}{t^2 - 2}$  et  $\frac{t - 1}{t + 1}$  sont bien définis, puis résoudre l'équation (d'inconnue  $t \in D$ ) :  $\frac{t^2 + 2}{t^2 - 2} = \frac{t - 1}{t + 1}$ .

**Exercice 7 (★★).** Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1.  $\forall r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}$  tel que  $r = e^s - 1$ .
2.  $\exists A \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, A > e^{-n}$ .

**Exercice 8 (★).** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 3^n - 1.$$

**Exercice 9 (★).** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -2v_n + 6$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-2)^n(v_0 - 2) + 2.$$

**Exercice 10 (★).** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, n^3 - n$  est divisible par 3.

**Exercice 11 (★★).** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, +\infty[, (1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

**Exercice 12 (★★).** Montrer que pour tout entier  $n \geq 4$ , on a  $2^n \geq n^2$ .

**Exercice 13 (★).** Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1, u_1 = 0$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(3 - 3^n)$ .

**Exercice 14 (★).** Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 15 (★).** Soit  $n_1, n_2, n_3$  des entiers naturels vérifiant  $n_1 + n_2 + n_3 = 30$ . Montrer qu'au moins un de ces entiers est supérieur à 10.

**Exercice 16 (★★).**

1. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
2. Montrer que réciproquement, si le produit de deux entiers est impair, alors ces deux entiers sont impairs.

**Exercice 17 (★★).** Montrer que  $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$  est irrationnel.

**Exercice 18 (★★★).** Montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.

**Exercice 19 (★★).** Résoudre l'équation (d'inconnue  $s \geq -1$ ) :  $s + \sqrt{s+1} = 5$ .

**Exercice 20 (★★).** Déterminer toutes les applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

**Exercice 21 (★★★).** Trouver toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  qui vérifient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

**Exercice 22 (Type DS).** L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x \tag{E_1}$$

1. Dans cette question, on suppose que  $f$  est une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie  $(E_1)$ .
  - (a) Déterminer  $f(\frac{1}{2})$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$ . On note cette égalité  $(E_2)$ .
  - (c) A l'aide de  $(E_1)$  et  $(E_2)$ , déterminer une expression de  $f(x)$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Donner la conclusion de l'exercice.