Rudiments de logique

Exercice 1 (★). On tire 4 cartes dans un jeu. Donner la négation des affirmations suivantes :

1. Les quatre cartes sont rouges.
2. Il y a au moins deux cœurs.
3. Il n'y a aucun pique ou que des piques.
4. Il y a au moins un pique et un cœur.

Résultat attendu :

1. Il y a au moins une carte noire.
2. Il y a au plus un cœur.
3. Il y a entre 1 et 3 piques.
4. Il n'y a pas de pique ou il n'y a pas de cœur.

Exercice 2 (★). Soit n un entier naturel. Traduire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. n est un multiple de 5.
2. n n'est pas un multiple de 3.

Résultat attendu :

1. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 5k$
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ n \neq 3k$

Exercice 3 (★). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f est constante.
4. La fonction f est paire.

Résultat attendu :

1. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
3. Deux possibilités : ($\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k$) ou ($\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$).
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.

Exercice 4 (★★). Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f n'est pas impaire.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
3. L'équation $f(x) = 2$ admet au moins deux solutions distinctes.
4. La fonction f n'est pas majorée.

Résultat attendu :

1. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) \neq -f(x)$ (négation de $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$).
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$, $f(x) = 2$ et $f(y) = 2$.
4. $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > M$ (négation de $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$).

Exercice 5 (★). Les implications suivantes sont elles vraies ou fausses ? On justifiera chaque réponse.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant 1) \Rightarrow (e^x \geqslant 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant 1) \Leftarrow (e^x \geqslant 1)$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \geqslant y) \Rightarrow (x^2 \geqslant y^2)$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \geqslant y) \Leftarrow (x^2 \geqslant y^2)$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x = y) \Rightarrow (\cos(x) = \cos(y))$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x = y) \Leftarrow (\cos(x) = \cos(y))$
7. $\forall m \in \mathbb{N},\ (m \text{ pair}) \Rightarrow (m \text{ multiple de } 6)$
8. $\forall m \in \mathbb{N},\ (m \text{ pair}) \Leftarrow (m \text{ multiple de } 6)$
9. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (\cos(x) = \cos(y)) \Rightarrow (x^2 = y^2)$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (\cos(x) = \cos(y)) \Leftarrow (x^2 = y^2)$

Résultat attendu :

1. Vraie (on le montre par supposition/déduction)
2. Fausse (on trouve un contre-exemple)
3. Fausse (on trouve un contre-exemple)
4. Fausse (on trouve un contre-exemple)
5. Vraie (on le montre par supposition/déduction)
6. Fausse (on trouve un contre-exemple)
7. Fausse (on trouve un contre-exemple)
8. Vraie (on le montre par supposition/déduction)
9. Fausse (on trouve un contre-exemple)
10. Vraie (on le montre par supposition/déduction)

Exercice 6 (★). Déterminer l'ensemble (noté D) des réels t tels que les nombres $\dfrac{t^2+2}{t^2-2}$ et $\dfrac{t-1}{t+1}$ sont bien définis, puis résoudre l'équation (d'inconnue $t \in D$) : $\dfrac{t^2+2}{t^2-2} = \dfrac{t-1}{t+1}$.

Résultat attendu : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
Soit $t \in D$, l'équation équivaut à $t(t+2) = 0$, l'ensemble de ses solutions est donc $\{-2, 0\}$.

Exercice 7 (★★). Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall r \in \mathbb{R}$, $\exists s \in \mathbb{R}$ tel que $r = e^s - 1$.
2. $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A > e^{-n}$.

Résultat attendu :

1. La phrase est fausse, il faut trouver un contre-exemple (on exhibe une valeur concrète de r qui...).
2. La phrase est vraie, on le montre par raisonnement direct (on exhibe une valeur concrète de A qui...).

Exercice 8 (★). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times 3^n - 1.$$

Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple.

Exercice 9 (★). Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2v_n + 6$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-2)^n(v_0 - 2) + 2.$$

Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple.

Exercice 10 (★). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.
Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple (ou par disjonction de cas, mais c'est plus long).

Exercice 11 (★★). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1, +\infty[$, $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.
Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple (attention à la bonne définition de x).

Exercice 12 (★★). Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant n^2$.
Résultat attendu : On raisonne par récurrence simple.

Exercice 13 (★). Soit u la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2}(3 - 3^n)$.
Résultat attendu : On raisonne par récurrence double.

Exercice 14 (★). Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
Résultat attendu : On montre par récurrence forte que $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 15 (★). Soit n_1, n_2, n_3 des entiers naturels vérifiant $n_1 + n_2 + n_3 = 30$. Montrer qu'au moins un de ces entiers est supérieur à 10.
Résultat attendu : On raisonne par l'absurde, en sommant les valeurs pour obtenir une contradiction.

Exercice 16 (★★).

1. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
2. Montrer que réciproquement, si le produit de deux entiers est impair, alors ces deux entiers sont impairs.

Résultat attendu :

1. On raisonne de manière directe (attention à la bonne définition des variables utilisées).
2. On raisonne par contraposition puis par disjonction de cas.

Exercice 17 (★★). Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.
Résultat attendu : On raisonne par l'absurde. Des considérations de parité donnent la contradiction cherchée.

Exercice 18 (★★★). Montrer qu'il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.
Résultat attendu : On raisonne par l'absurde, puis on montre par récurrence une inégalité reliant d_n et d_0 pour obtenir la contradiction recherchée.

Exercice 19 (★★)**.** Résoudre l'équation (d'inconnue $s \geqslant -1$) : $s + \sqrt{s+1} = 5$.
Résultat attendu : La résolution se fait par équivalences ou par analyse-synthèse. L'unique solution est 3.

Exercice 20 (★★)**.** Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Résultat attendu : On raisonne par analyse-synthèse, en s'intéressant tout d'abord à la valeur $f(0)$. La seule application qui convient est $f : x \mapsto 1 + x$.

Exercice 21 (★★★)**.** Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Résultat attendu : On raisonne par analyse-synthèse, en s'intéressant à $f(0)$, puis $f(1)$... Les fonctions qui conviennent sont celles de la forme $f : n \to n \times C$ avec $C \in \mathbb{N}$.

Exercice 22 (Type DS)**.** L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x \qquad (E_1)$$

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E_1).
   (a) Déterminer $f(\frac{1}{2})$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x$. On note cette égalité (E_2).
   (c) A l'aide de (E_1) et (E_2), déterminer une expression de $f(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Donner la conclusion de l'exercice.

Résultat attendu :

1. (a) Dans le cas particulier $x = \frac{1}{2}$, (E_1) donne $f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2}$. Donc $\frac{3}{2}f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$. Donc $f(\frac{1}{2}) = 1$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. (E_1) peut s'écrire $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) + tf(1-t) = 1 + t$. Prendre le cas particulier $t = 1 - x$ donne alors :
   $$f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) = 1 + (1-x),$$
   c'est-à-dire $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On réalise la combinaison $(E_1) - x(E_2)$ (pour faire disparaître le terme en $f(1-x)$) :
   $$f(x) + xf(1-x) - xf(1-x) - x(1-x)f(x) = (1+x) - x(2-x).$$
   En simplifiant et regroupant les termes, on trouve $f(x)\,(1 - x(1-x)) = x^2 - x + 1$, c'est-à-dire $f(x)\left(x^2 - x + 1\right) = x^2 - x + 1$.
   Le discriminant de la fonction polynomiale $t \mapsto t^2 - t + 1$ vaut $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, la fonction ne peut donc pas s'annuler. Cela permet de diviser dans la relation précédente et donne $f(x) = 1$.
   On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.
2. On raisonne par analyse synthèse :
   — Analyse : si on suppose que f est une solution de (E_1), la question précédente donne que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.
   — Synthèse : soit f la fonction constante égale à 1. Elle vérifie (E_1) car $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) + xf(1-x) = 1 + x \times 1 = 1 + x.$$
   Donc l'unique fonction solution de (E_1) est la fonction constante égale à 1.