Rudiments de logique

Cours de É. Bouchet – PCSI

5 septembre 2025

Table des matières

1 Généralités et rappels

1.1 Propositions, négations et connecteurs

Définition 1.1 (Proposition)

Une **proposition** (ou **assertion**) est une phrase mathématique qui est soit vraie (V) soit fausse (F).

Exemple. « 3 » n'est ni vrai ni faux : ce n'est pas une proposition.
La proposition P_1 : « $3 \geqslant 10$ » est fausse.
La proposition P_2 : « la fonction $x \mapsto x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$ » est vraie.

Définition 1.2 (Négation d'une proposition)

Soit P une proposition. On appelle **négation de** P, notée non(P), la proposition définie par :
- non(P) est vraie si P est fausse,
- non(P) est fausse si P est vraie.

Remarque. Cette définition se résume par la table de vérité suivante :

P	**non(P)**
V	**F**
F	**V**

Exemple. non(P_1) est « $3 < 10$ », ce qui est vrai.
non(P_2) est « la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas positive sur $\mathbb{R}$ », ce qui est faux.

Définition 1.3 (P et Q, P ou Q)

Soit P et Q deux propositions.
- la proposition (P et Q) est vraie quand les phrases P et Q sont toutes les deux vraies ;
- la proposition (P ou Q) est vraie quand au moins l'une des phrases P ou Q est vraie.

Remarque. Ces définitions se résument par les tables de vérité suivantes :

P	Q		P et Q	P ou Q
V	V		**V**	**V**
V	F		**F**	**V**
F	V		**F**	**V**
F	F		**F**	**F**

Exemple. La proposition (P_1 et P_2) est fausse, alors que (P_1 ou P_2) est vraie.

Remarque. Attention : le « ou » mathématique diffère du « ou » utilisé habituellement en français. Si un restaurant propose « fromage ou dessert », on a rarement le droit de choisir les deux...

Proposition 1.4 (Négation de et/ou)

Si P et Q sont des propositions, alors :
- la négation de (P et Q) est (non(P) ou non(Q)),
- la négation de (P ou Q) est (non(P) et non(Q)).

Démonstration. On vérifie que les tables de vérité sont les mêmes. □

Exercice 1. Déterminer la négation de « on est lundi et c'est le matin ».
<u>Solution :</u> C'est « on n'est pas lundi ou ce n'est pas le matin ».

Exercice 2. Soit n un entier naturel. Déterminer la négation de « n est pair ou $n > 9$ ».
<u>Solution :</u> C'est « n est impair et $n \leqslant 9$ ». Autrement dit, « n vaut 1, 3, 5, 7 ou 9 ».

1.2 Implication, équivalence

Définition 1.5 (Implication, réciproque)

Soit P et Q des propositions, on définit la proposition $P \Rightarrow Q$ par la table de vérité suivante :

P	Q		$P \Rightarrow Q$
V	V		**V**
V	F		**F**
F	V		**V**
F	F		**V**

On appelle **réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$ l'implication $Q \Rightarrow P$.

Exercice 3. Soit x un réel, déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses :

1. $x \geqslant 0 \Rightarrow x+1 \geqslant 0$,
2. $x+1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$.

Solution :

1. On suppose que $x \geqslant 0$, alors $x+1 \geqslant 1 \geqslant 0$. Donc $x \geqslant 0 \Rightarrow x+1 \geqslant 0$ est vraie.
2. Soit $x = -\frac{1}{2}$, on a $x+1 \geqslant 0$, mais pas $x \geqslant 0$. Donc $x+1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$ est fausse dans le cas général.

Exercice 4. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et x, y deux réels. Déterminer si les implications suivantes sont vraies ou fausses :

1. $x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$,
2. $f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x \geqslant y$.

Solution :

1. On suppose que $x \geqslant y$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(y)$. Donc $x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$ est vraie.
2. Soit f la fonction nulle (qui est croissante sur $\mathbb{R}$), $x = 0$ et $y = 1$. Alors $f(x) = 0 \geqslant 0 = f(y)$, mais $x < y$. Donc $f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x \geqslant y$ est fausse dans le cas général.

Remarque. La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $\big(P \,\text{et}\, \text{non}(Q)\big)$.

Remarque. Attention à ne pas confondre $(P \Rightarrow Q)$ et (P donc Q). Dans le premier cas, on dit que si P est vrai, alors Q le sera aussi. Dans le second cas, on affirme que P est vrai et on en déduit que Q l'est aussi.

Définition 1.6 (Condition nécessaire ou suffisante)

Soit P et Q des propositions, si $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que :
- P est une **condition suffisante** pour avoir Q,
- Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.

Définition 1.7 (Équivalence)

Soit P et Q des propositions. On note $P \Leftrightarrow Q$ la proposition $((P \Rightarrow Q)\,\text{et}\,(Q \Rightarrow P))$.
Elle se lit « P **si et seulement si** Q », souvent abrégé « P **ssi** Q ».

Remarque. Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q (et inversement).

Remarque. Le raisonnement par équivalence est particulièrement utile quand on cherche à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème (alors qu'on raisonne par déductions quand on cherche juste à montrer quelque chose).

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des solutions x réelles de l'équation $x^2 - x = 0$.
Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$
L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{0, 1\}$.

1.3 Quantificateurs

Définition 1.8 ($\forall$,$\exists$)

Soit E un ensemble et P une propriété.
On écrit $\forall x \in E,\ P(x)$ quand P est vraie pour tout élément x dans E.
On écrit $\exists x \in E,\ P(x)$ quand il existe au moins un x dans E pour lequel P est vraie.
On écrit $\exists ! x \in E,\ P(x)$ quand il existe exactement un x dans E pour lequel P est vraie.

Remarque. Les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont en aucun cas des abréviations. Ils ne doivent jamais être utilisés dans une phrase en français pour remplacer « pour tout » ou « il existe ».

Exemple. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$ car le carré d'un réel est toujours positif.
Par contre, $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -1$ car par exemple $i^2 = -1$.

Exercice 6. Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \geqslant 3$ et $\dfrac{1}{x} \leqslant 0,1$.
Solution : $x = 10$ convient, car $10^2 = 100 \geqslant 3$ et $\frac{1}{10} = 0,1 \leqslant 0,1$.

Remarque. On peut permuter les quantificateurs $\forall$ entre eux et les quantificateurs $\exists$ entre eux. Dans le cas général, il est cependant interdit de permuter un $\forall$ et un $\exists$.

Exemple. $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = y$ est une assertion vraie : pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $x = \sqrt{y}$ convient.
$\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = y$ est une assertion fausse par contre : il faudrait que ce soit le même réel x qui, mis au carré, vaille plusieurs valeurs de y différentes, c'est impossible.

Proposition 1.9 (Négation des quantificateurs)

Soit E un ensemble, on a :

$$\mathrm{non}(\forall x \in E, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in E, \mathrm{non}(P(x)),$$

et

$$\mathrm{non}(\exists x \in E, P(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in E, \mathrm{non}(P(x)).$$

Démonstration. On vérifie que les tables de vérité sont les mêmes. □

Exercice 7. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 9x + 20$. Montrer que f n'est pas une fonction positive.
Solution : « la fonction f est une fonction positive » s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$. En passant à la négation, « la fonction f n'est pas une fonction positive » s'écrit donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 0$. Or, on trouve par calcul :

$$f(4,5) = f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{81}{4} - \frac{81}{2} + 20 = \frac{81 - 81 \times 2 + 80}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Donc la fonction f n'est pas positive.

2 Les différents modes de raisonnement

2.1 Raisonnement par disjonction des cas

Définition 2.1 (Principe du raisonnement par disjonction de cas)

Raisonner par **disjonction de cas** pour démontrer une propriété P consiste en la décomposer en un nombre fini de cas vérifiés séparément.

Exercice 8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$,
— Si n est pair, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $\frac{n(n+1)}{2} = k(2k+1)$, qui est bien un entier.

— Si n est impair, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Donc $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$, qui est bien un entier.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Exercice 9. Soit x et y deux réels fixés. Montrer que $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

Solution :

— Si $x \geqslant y$, alors $\max(x,y) = x$ et $|x-y| = x-y$. Donc $\dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+x-y}{2} = x = \max(x,y)$.

— Si $x < y$, alors $\max(x,y) = y$ et $|x-y| = y-x$. Donc $\dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+y-x}{2} = y = \max(x,y)$.

Comme $x \geqslant y$ et $x < y$ couvrent toutes les valeurs possibles de x et y, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

2.2 Raisonnement par récurrence

2.2.1 Récurrence simple

Proposition 2.2 (Principe de récurrence)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Soit n_0 un entier. Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. Admis. □

Exercice 10. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $0+1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$: « $0+1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

— $0 = \dfrac{0 \times 1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$0+1+2+\ldots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0+1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.2.2 Récurrence double

Proposition 2.3 (Récurrence double)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Soit n_0 un entier. Si $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. On montre par récurrence simple sur $n \geqslant n_0$ la propriété « $P(n)$ et $P(n+1)$ ». □

Exercice 11. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

Solution : On remarque que $u_2 = 9$, $u_3 = 27$. On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$: « $u_n = 3^n$ ».

— On a $u_0 = 3^0$ donc $P(0)$ est vraie, et $u_1 = 3^1$ donc $P(1)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Alors :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n = 2 \cdot 3^{n+1} + 3 \cdot 3^n = 3^n(6+3) = 3^{n+2}.$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

On conclut que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n$.

2.2.3 Récurrence forte

Proposition 2.4 (Récurrence forte)

Soit n un entier, et $P(n)$ une propriété dépendant de n. Soit n_0 un entier. Si $P(n_0)$ est vraie (initialisation) et si $\forall n \geqslant n_0$, $(\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) alors pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. On montre par récurrence simple sur $n \geqslant n_0$ la propriété « $\forall k \in [\![n_0, n]\!]$, $P(k)$ ». □

Exercice 12. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$.
Solution : On remarque que $u_1 = 1$, puis que $u_2 = 1$. On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$: « $u_n = 1$ ».

— On a $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)$ est vraie. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \frac{1}{n+1}(1 + 1 + \cdots + 1) = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

2.3 Raisonnement par contraposition

Définition 2.5 (Contraposée)

Soit P et Q deux propositions. La **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.

Exemple. La contraposée de « si on est en hiver, le professeur porte des chaussettes » est « si le professeur ne porte pas de chaussettes, on n'est pas en hiver ».

Proposition 2.6 (Principe du raisonnement par contraposition)

Soit P et Q deux propositions, on a alors :

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\big(P \Rightarrow Q\big)$ et $\big(\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)\big)$ ont les mêmes tables de vérité. □

Exercice 13. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, (n^2 est pair) $\Rightarrow$ (n est pair).
Solution : Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'il est impair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Ce qui donne :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Comme k est entier, $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, on en déduit que n^2 est impair. D'où (n est impair) $\Rightarrow$ (n^2 est impair).
Par contraposition, on obtient (n^2 est pair) $\Rightarrow$ (n est pair).

2.4 Raisonnement par l'absurde

Proposition 2.7 (Principe du raisonnement par l'absurde)

Soit P une proposition. Si en supposant que P est fausse, on déduit une contradiction, alors P est vraie.

Démonstration. Montrer que P est vrai revient à montrer que Vrai implique P. Par contraposition, il suffit donc de montrer que $\text{non}(P)$ implique Faux. □

Exercice 14. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, dont on admet qu'elle est bien définie et à valeurs strictement positives. Montrer qu'elle diverge.
Solution : On suppose que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. En passant à la limite dans cette égalité, on trouve :

- Si $\ell \neq 0$, alors $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$, donc $\frac{1}{\ell} = 0$: absurde.
- Si $\ell = 0$, comme la suite (u_n) est positive, alors $(\frac{1}{u_n})$ diverge vers $+\infty$. Le passage à la limite donne donc $\ell = +\infty$: absurde.

Donc la suite (u_n) diverge.

Variante : on pouvait aussi utiliser la positivité de u pour montrer que la suite est croissante. Or $u_0 = 1$, donc $\ell \geqslant 1$, ce qui permet d'éviter la disjonction de cas.

2.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Définition 2.8 (Principe du raisonnement par analyse-synthèse)

Le raisonnement par analyse-synthèse sert à déterminer l'ensemble des solutions d'un problème. Il se rédige en deux étapes :

- **L'analyse :** correspond au sens direct d'un raisonnement par équivalences. On étudie une solution, en supposant son existence. Le but est d'obtenir un maximum d'informations à son sujet, pour se ramener à un nombre limité de candidats.
- **La synthèse :** correspond à la réciproque d'un raisonnement par équivalences. On étudie séparément chacun des candidats de l'analyse pour vérifier s'ils sont solution ou non du problème.

Remarque. L'analyse permet de déterminer des conditions nécessaires à la résolution du problème, la synthèse permet ensuite de vérifier si ces conditions sont suffisantes.

Remarque. Le plus souvent, on raisonne par analyse-synthèse quand on cherche toutes les solutions d'un problème mais qu'un raisonnement par équivalences est impossible (ou compliqué).

Exercice 15. Déterminer les solutions réelles x de l'équation (E) : $\sqrt{6+x} = x$.
Solution : Première méthode : par analyse-synthèse.

- Analyse : on suppose que (E) admet une solution $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sqrt{6+x} = x$. En passant au carré, on trouve $6 + x = x^2$, et donc $x^2 - x - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$. Donc $x = \frac{1+5}{2} = 3$ ou $x = \frac{1-5}{2} = -2$.
- Synthèse :
  - $\sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$, donc $x = 3$ est une solution de (E).
  - $\sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$, donc $x = -2$ n'est pas une solution de (E).

Ainsi, l'équation (E) admet $x = 3$ pour unique solution.

Deuxième méthode : par équivalences. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{6+x} = x &\Longleftrightarrow \sqrt{6+x} = x \text{ et } x \geqslant 0 \quad \text{car une racine est toujours positive} \\
&\Longleftrightarrow 6 + x = x^2 \text{ et } x \geqslant 0 \quad \text{car la fonction carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&\Longleftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 3) \text{ et } x \geqslant 0 \quad \text{par calcul du discriminant} \\
\sqrt{6+x} = x &\Longleftrightarrow x = 3.
\end{aligned}$$

Donc $x = 3$ est l'unique solution de l'équation.

Exercice 16. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$

Solution :

— Analyse : On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie la relation. Alors en particulier, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = x$:

$$f(2x) - f(0) = 4x^2 = (2x)^2.$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{R}$, ($z = 2x$, qui parcourt bien l'ensemble des réels), $f(z) = f(0) + z^2$.

— Synthèse : Soit $C \in \mathbb{R}$ une constante fixée et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(z) = C + z^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) - f(x-y) = (x+y)^2 + C - (x-y)^2 - C = 4xy.$$

Donc f est bien solution du problème.

Les solutions du problème sont les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \mathbb{R}$, $f(z) = C + z^2$.

Variante : dans l'analyse, on pouvait aussi faire apparaître un taux d'accroissement pour montrer $f'(x) = 2x$ et en déduire f par calcul de primitive.