

Exercice 1 (★). Traduire la définition des ensembles suivants avec des notations ensemblistes, de deux manières différentes (l'une par paramétrage, l'autre en utilisant une propriété qui caractérise l'ensemble).

1. E : l'ensemble des réels qui sont le logarithme d'un entier naturel non nul.
2. F : l'ensemble des réels qui sont à une distance inférieure à $\frac{1}{10}$ d'un entier.

Exercice 2 (★). Traduire la définition des ensembles suivants avec des notations ensemblistes.

1. F_1 : l'ensemble des carrés parfaits (c'est-à-dire 1, 4, 9, 16, etc.), à écrire de deux façons différentes.
2. F_2 : l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui sont décroissantes.
On rappelle que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} se note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3 (★). On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants :

$A = \{ \text{les deux cartes tirées sont rouges} \}$

$B = \{ \text{les deux cartes tirées sont un valet et un dix} \}$

$C = \{ \text{les deux cartes tirées sont des figures} \}$

1. Que représentent les ensembles suivants ?

- (a) \bar{A} (b) $A \cap B \cap \bar{C}$ (c) $(A \cap B) \cap C$ (d) $(A \cap \bar{C}) \cap (B \cap \bar{C})$

2. Écrire à l'aide des ensembles A, B, C les ensembles :

$F = \{ \text{les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges} \}$

$G = \{ \text{on obtient au plus une figure} \}$

Exercice 4 (★★). On lance une infinité de fois une pièce équilibrée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \{ \text{obtenir Pile au } n\text{-ième lancer} \}$. Écrire les événements suivants à l'aide des $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

1. $A = \{ \text{obtenir le premier pile au } 10\text{-ième lancer} \}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \{ \text{obtenir le premier pile au } k\text{-ième lancer} \}$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \{ \text{obtenir le premier pile au plus tard au } k\text{-ième lancer} \}$.
4. $B = \{ \text{obtenir au moins un pile} \}$.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = \{ \text{la longueur de la première succession de Pile ou de Face est } k \}$.

Exercice 5 (★). Soit E un ensemble et X et Y deux sous-ensembles de E . Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y})$
2. $B = (X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y})$
3. $C = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap Y) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})$
4. $D = (X \cup Y) \cap (X \cup \bar{Y}) \cap (\bar{X} \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})$

Exercice 6 (★★). Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E . Montrer l'équivalence suivante :

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B.$$

Exercice 7 (★★★). Montrer que $\bigcap_{k=1}^{+\infty}]-\infty, -k] = \emptyset$.

Exercice 8 (★). Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 42 et 60. En déduire leur PGCD et PPCM.

Exercice 9 (★). Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 210 et 225. En déduire leur PGCD et PPCM.

Exercice 10 (★★). Lister les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ qui vérifient $\text{PGCD}(x, y) = 5$ et $\text{PPCM}(x, y) = 60$.

Exercice 11 (Type DS). Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensemble A et B de E , on pose $A \nabla B = \overline{A \cup B}$.

1. Soit A un sous-ensemble de E . Exprimez \bar{A} à l'aide de A et de l'opération ∇ .
2. Soit A et B deux sous-ensembles de E , calculer et simplifier $(A \nabla A) \nabla (B \nabla B)$.
3. Soit A et B deux sous-ensembles de E . Exprimer $A \cup B$ et $A \setminus B$ à l'aide de A, B et de la loi ∇ uniquement.
Remarque : cela signifie qu'il ne faut laisser ni union, ni intersection, ni complémentaire dans le résultat de cette question.