Sommes et produits

Cours de É. Bouchet – PCSI

1$^{\text{er}}$ juillet 2025

Table des matières

1 Sommes

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Somme)

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leqslant n$ et u une suite de réels, on note $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i$.

Remarque. La somme $\sum_{i=p}^{n} u_i$ contient $n-p+1$ termes.

Remarque. Dans le cas où $p > n$, on pose $\sum_{i=p}^{n} u_i = 0$ par convention.

Définition 1.2 (Indice, bornes)

Dans la somme $\sum_{i=p}^{n} u_i$, i s'appelle **l'indice**, p et n sont **les bornes** de la somme.

Remarque. L'indice d'une somme est dit muet, ce qui signifie que l'on peut écrire : $\sum_{i=p}^{n} u_i = \sum_{j=p}^{n} u_j$.

Remarque. On peut aussi noter $\sum_{p \leqslant k \leqslant n} u_k$ ou $\sum_{k \in A} u_k$ avec A un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. On a par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} u_k.$$

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, simplifier les écritures suivantes : $\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ termes}}$, puis $\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n \text{ termes}}$, puis $2+4+6+\ldots+2n$, puis $1+3+5+\ldots+(2n+1)$, puis $1+3+5+\ldots+2013$.

Remarque. On déduit entre autres de ces écritures que $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant p$, $\sum_{k=p}^{n} 1 = n-p+1$.

1.2 Premiers calculs de sommes

Proposition 1.3 (Somme des premiers entiers)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Remarque. Ces formules restent vraies en faisant partir les sommes de 1, puisque les termes en 0 sont nuls.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{2n} k^2$.

Exercice 3. Calculer $\sum_{k=2}^{11} k^2$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{j=2}^{n+1} j^2$.

Proposition 1.4 (Linéarité de la somme)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et x, y des suites de réels. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(x_k + \lambda y_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \lambda \sum_{k=p}^{n} y_k$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-2)$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} ki\right)$.

1.3 Changements d'indices et regroupements de termes

Proposition 1.5 (Changements d'indices)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, u une suite de réels et $k \in \mathbb{Z}$.

— En posant $j = i + k$, on effectue un **changement d'indice par translation** : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_{i+k} = \sum_{j=p+k}^{n+k} u_j$.

— En posant $j = k - i$, on effectue un **changement d'indice par retournement** : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_{k-i} = \sum_{j=k-n}^{k-p} u_j$.

Remarque. ATTENTION : il est interdit de « sauter » des indices, par exemple de poser $k = 2i$ (ce qui reviendrait à ne prendre que les termes pairs).

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n-i)^2$.

Proposition 1.6 (Regroupements des indices pairs et impairs)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et u une suite de réels, $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} u_p = \sum_{p=0}^{n} u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k(-1)^k$.

1.4 Télescopages

Proposition 1.7 (Somme télescopique)

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tous entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$.

Remarque. Cette formule s'adapte de manière directe à toute différence de termes consécutifs. En particulier,

$$\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_{p-1}.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

1.5 Sommes et puissances

Proposition 1.8 (Somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1$, sinon $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Remarque. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$ Soit $q \neq 1$. On peut montrer de même que :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} = q^p \frac{1 - q^{n+1-p}}{1 - q}.$$

Ce résultat se retrouve par changement d'indice en posant $j = k - p$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{j=0}^{n-p} q^{j+p} = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p \frac{1 - q^{n+1-p}}{1 - q}$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{2^k}$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^k}$.

Proposition 1.9 (Identité remarquable)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $a^n - b^n = (a - b) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$.

Remarque. Contrairement aux précédentes, cette formule est davantage utilisée dans le sens qui fait apparaître la somme, pour factoriser par $a - b$.

Exemple. On a $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, ainsi que $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$.

1.6 Sommes doubles

Lorsqu'on a une somme double où les indices des deux sommes ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut intervertir les sommes, et donc sommer dans l'ordre qu'on préfère (c'est le cas notamment de la somme de l'exercice 6). Ce n'est pas le cas si les indices dépendent l'un de l'autre.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$.

Remarque. La notation $\displaystyle\sum_{p \leqslant i, j \leqslant n}$ signifie que i et j varient entre p et n sans dépendre l'un de l'autre.

Proposition 1.10 (Produit de sommes)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et a, b deux suites de réels, alors $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ 0 \leqslant i \leqslant p}} a_j b_i$.

Remarque. En particulier, $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)^2 = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + 2 \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} a_j a_i$. En effet,

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)^2 = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) = \sum_{0 \leqslant i, j \leqslant n} a_j a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} a_j a_i + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} a_j a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + 2 \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} a_j a_i.$$

Exemple. Cette formule permet de développer facilement des expressions usuelles. Par exemple,

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3.$$

2 Produits

2.1 Généralités

Définition 2.1 (Produit)

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leqslant n$ et u une suite de réels, on note $u_p \times u_{p+1} \times \ldots \times u_n = \displaystyle\prod_{i=p}^{n} u_i$.

Remarque. Dans le cas où $p > n$, on pose $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} u_i = 1$ par convention.

Remarque. Comme dans le cas des sommes, il est possible d'effectuer des changements d'indice sur des produits. On retrouve également le nombre de termes : le produit $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} u_i$ contient $n - p + 1$ termes.

Proposition 2.2 (Produit télescopique)

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. Pour tous entiers $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$, on a $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$.

Exercice 14. Soit $n \geqslant 2$, calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Remarque. Attention : il n'y a pas de linéarité du produit.

Proposition 2.3 (Multiplication par une constante)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$ et $u_p, \ldots, u_n$ des réels,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \prod_{k=p}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

2.2 Factorielle

Définition 2.4 (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** n la quantité : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

Exemple. $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120.$

Remarque. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.
Toute autre formule pour simplifier des notations factorielles est fausse, on ne peut notamment pas simplifier $(2n)!$

Exercice 15. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k}$ à l'aide de la notation factorielle.

3 Coefficients binomiaux

3.1 Premiers calculs

Définition 3.1 (Coefficients binomiaux)

Soit $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$.

— Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$ on pose $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.

— Si $n < 0$ ou $p \notin [\![0,n]\!]$ on pose $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.

Remarque. En particulier, si $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$. Si de plus $n \neq 0$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\times 2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 16. Calculer $\binom{8}{4}$.

Exercice 17. Calculer $\binom{9}{3}$.

Proposition 3.2 (Formule de Pascal)

$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Remarque. Le tableau suivant, appelé triangle de Pascal, permet de retrouver facilement les petits coefficients binomiaux :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

3.2 Propriétés et formules

Proposition 3.3 (Symétrie)

$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Exemple. $\binom{8}{2} = \binom{8}{8-2} = \binom{8}{6}$.

Proposition 3.4 (Formule "sans nom")

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $\forall p \in \mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Remarque. On peut rencontrer cette relation sous l'appellation « formule du pion », « formule du capitaine », « identité d'absorption » et d'autres encore... Aucun de ces noms n'est cependant au programme.

Proposition 3.5 (Formule du binôme de Newton)

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exercice 18. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $(1+x)^4$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.