Exercices PCSI
É.Bouchet

Sommes et produits

Exercice 1 (★). Soit $n \geqslant 5$ un entier et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole $\sum$.

1. $\frac{1^2}{e^2} + \frac{2^2}{e^3} + \ldots + \frac{n^2}{e^{n+1}}$
2. $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^{2n} - a^{2n+1}$
3. $a^n b + \frac{a^{n-1}b^2}{2} + \ldots + \frac{ab^n}{n} + \frac{b^{n+1}}{n+1}$

Exercice 2 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Pourquoi ?

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{j=1}^{n} b_j$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\alpha}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$

Exercice 3 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes (on donnera le résultat sous forme factorisée) :

1. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{3n} 2(\ell - 1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k + n - 1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(1-k)$

Exercice 4 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right)$.

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \frac{1}{2^k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{2^k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x^k$

Exercice 6 (★★). Soit $n \geqslant 2$ un entier et y un réel. Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{p=2}^{n^2}(3p + 2^{p+1})$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$
3. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}((j+2)^3 - j^3)$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} \frac{(1-y)^{k+1}}{2^{k-1}}$

Exercice 7 (★★). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

En calculant $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$ de deux façons différentes, retrouver la formule $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 8 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k \times k!)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Indication : $k = k + 1 - 1$.

Exercice 9 (★★★). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite u définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + b^{n+1}$. Déterminer une expression explicite du terme général de cette suite.

Exercice 10 (★). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes à double indice suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j)$

Exercice 11 (★★). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes à double indice suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \frac{i}{k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$

Exercice 12 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ? Pourquoi ?

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\alpha a_k) = \alpha \prod_{k=1}^{n} a_k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$

Exercice 13 (★). On considère la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} u_n$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}.$$

Exercice 14 (★★). Calculer les produits suivants.

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+n)$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1}$
3. $\displaystyle\prod_{p=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$

Exercice 15 (★★). Soit n un entier naturel. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.

Exercice 16 (★★★). Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k)! \geqslant ((n+1)!)^n .$$

Exercice 17 (★). Calculer :

1. $\displaystyle\binom{9}{4}$
2. $\displaystyle\binom{10}{3}$
3. $\displaystyle\binom{10}{6}$
4. $\displaystyle\binom{9}{6}$

Exercice 18 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p$.

Exercice 19 (★). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}$.

Exercice 20 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{i=2}^{2n}\binom{2n}{i}(-1)^i$ et $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}3^k x^{n-k}$.

Exercice 21 (Type DS). Soit $n \geqslant 1$, et f_n la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n}$.

1. Donner pour tout réel x une expression de $f_n(x)$ sans symbole $\sum$.
2. Dériver f_n sous ces deux formes pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la fonction f_n, en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n}\binom{n}{k}$. On pourra écrire $k^2 = k(k-1)+k$.