Petits systèmes et inégalités

Cours de É. Bouchet – PCSI

3 septembre 2025

Table des matières

1 Résolution de petits systèmes linéaires

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Système linéaire)

Soit p et n deux entiers naturels non nuls. On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues x_1, x_2, ..., x_p tout système $(\mathcal{S})$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont des réels fixés.

Définition 1.2 (Solution d'un système linéaire)

Un p-uplet de réels $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ est **solution du système** $(\mathcal{S})$ s'il est solution, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, de la i-ème équation L_i du système $(\mathcal{S})$.

— **Résoudre** le système $(\mathcal{S})$ c'est déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$.
— Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarque. Interprétation géométrique :

— Un système de n équations à trois inconnues correspond dans $\mathbb{R}^3$ à une intersection de n plans.
— Un système de n équations à deux inconnues correspond dans $\mathbb{R}^2$ à une intersection de n droites.

1.2 Méthode de résolution

Définition 1.3 (Opérations élémentaires)

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire $(\mathcal{S})$ une opération de l'un des trois types suivants :

1. échange de deux lignes L_i et L_j avec $i \neq j$, codifiée : $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. multiplication de la ligne L_i par un réel non nul α, codifiée : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.
3. addition de la ligne L_i et d'un multiple réel β de L_j avec $i \neq j$, codifiée : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$.

Remarque. On obtient un système linéaire équivalent à $(\mathcal{S})$ en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de $(\mathcal{S})$. Stratégiquement, le plus intéressant est de se servir d'une ligne pour éliminer une inconnue de toutes les autres, puis de recommencer avec le système linéaire à $p-1$ inconnues obtenu.

Remarque. On peut aussi résoudre un système par substitution, mais on ne le fera pas dans ce chapitre : c'est en général plus calculatoire et moins efficace.

Exercice 1. En utilisant les opérations élémentaires, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x+3y=8 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$.

Exercice 2. En utilisant les opérations élémentaires, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 2x-57y+z=6 \\ -x+6y-3z=-1 \end{cases}$.

Exercice 3. En utilisant les opérations élémentaires, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 2x-57y+z=-33 \\ -x+6y-3z=-1 \end{cases}$.

2 Inégalités réelles

2.1 Premières propriétés et règles de calcul

Définition 2.1 (Relation d'ordre)

On dit que la relation $\leqslant$ est une **relation d'ordre** sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$,
2. Antisymétrie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Longrightarrow x = y$,
3. Transitivité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$.

Proposition 2.2 (Opérations usuelles sur les inégalités)

Soit (a, b, c, d) des réels.

$$a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d,$$

$$a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0 \Rightarrow ac \leqslant bc, \qquad a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0 \Rightarrow ac \geqslant bc,$$

$$0 \leqslant ab \Rightarrow a \text{ et } b \text{ sont de même signe},$$

$$0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant d \Rightarrow 0 \leqslant ac \leqslant bd,$$

$$0 < a \leqslant b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Remarque. Attention, il est interdit de soustraire des inégalités, ou de les diviser, quels que soient les signes concernés. Pour « soustraire », on multiplie la deuxième inégalité par -1 et on somme. Pour « diviser », on passe la deuxième inégalité à l'inverse et on multiplie.

Exercice 4. Soit $x \in [0, 5]$. Déterminer un encadrement de $\dfrac{x + 5}{11 - 2x}$ par deux constantes réelles.

Exercice 5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k} \geqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Résoudre l'inéquation $e^{3x}(e^{-2x} - 5) \leqslant 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. On peut aussi manipuler des inégalités strictes, mais c'est souvent plus compliqué. Dans ce cas, il faut étudier à la main les cas d'égalité pour vérifier s'ils peuvent apparaître.

Exercice 7. Résoudre l'inéquation $\frac{\ln(x)}{2-x} < 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$.

2.2 Ensembles et inégalités

Définition 2.3 (Intervalle)

Soit I un ensemble de réels. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ quand pour tous $(a, b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset I$.

Exemple. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0, 5[$, $]3, 18[$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Par contre, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{N}$, $[0, 1] \cup [2, 4]$ n'en sont pas.

Définition 2.4 (Majorant, minorant)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un **majorant** (resp. **minorant**) de A est un élément M de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant M \text{ (resp. } x \geqslant M).$$

Définition 2.5 (Ensemble majoré, minoré, borné)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit qu'il est **majoré** (resp. **minoré**) s'il admet un majorant (resp. minorant). On dit qu'il est **borné** quand il est à la fois majoré et minoré.

Définition 2.6 (Maximum, minimum)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel M est le **maximum** (resp. **minimum**) de A si $M \in A$ et

$$\forall x \in A, \quad x \leqslant M \text{ (resp. } x \geqslant M).$$

Remarque. Un ensemble A ne possède pas nécessairement de majorant ou minorant, et s'ils existent, il ne sont pas uniques. De même, A n'admet pas nécessairement de maximum ou minimum. Par contre, s'ils existent, ils sont uniques.

Exemple. $\mathbb{R}$ et $[0, +\infty[$ ne possèdent pas de majorants, ni de maximum. Par contre, $[0, 5]$ et $[0, 5[$ possèdent des majorants : 5, 6, 10, ou plus généralement tout réel $x \geqslant 5$. L'ensemble $[0, 5]$ possède également un maximum : 5, alors que $[0, 5[$ ne possède pas de maximum.

2.3 Borne supérieure

Proposition 2.7 (Théorème de la borne supérieure)

Tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ non vide et majoré (resp. minoré) admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant). Il est appelé **borne supérieure** de A (resp. **borne inférieure**) et noté $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$).

Exemple. $[0, 5]$ et $[0, 5[$ ont tous les deux 5 comme borne supérieure.

Remarque. Si un intervalle non vide est borné, il contient alors tous les réels compris entre sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Remarque. Dans le cas où A est non vide et majoré,
- $\sup(A)$ n'est pas forcément un élément de A, à la différence de $\max(A)$ qui, **s'il existe**, est nécessairement un élément de A.
- si $\max(A)$ existe, alors $\max(A) = \sup(A)$.
- $\sup(A)$ est unique, il y a par contre une infinité de majorants.

Exercice 8. Soit $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer (s'ils existent) : la borne supérieure de A, le maximum de A, la borne inférieure de A, le minimum de A.

3 Valeur absolue

3.1 Définition et premières manipulations

Définition 3.1 (Valeur absolue)

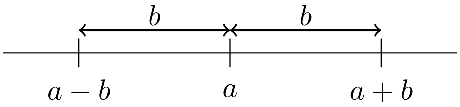
Pour tout réel x, le maximum de l'ensemble $\{x, -x\}$ est la **valeur absolue** de x, notée $|x|$.

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$, on peut aussi écrire $|x| = \sqrt{x^2}$, ou $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$.
Cette dernière égalité permet de se ramener à des disjonctions de cas, ce qui est très pratique dans les calculs.

Remarque. Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, et $x \in \mathbb{R}$,

$$|x-a| \leqslant b \iff \begin{cases} x-a \leqslant b & \text{et } x-a \geqslant 0 \\ \text{ou} & \\ -x+a \leqslant b & \text{et } x-a \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \leqslant x \leqslant a+b \\ \text{ou} \\ a-b \leqslant x \leqslant a \end{cases} \iff a-b \leqslant x \leqslant a+b.$$

La condition $|x-a| \leqslant b$ signifie donc que sur la droite réelle, le point x se situe à une distance inférieure à b du point a :



Exercice 9. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \exp\left(-|x|+1\right) dx$.

Exercice 10. Résoudre l'équation $|-3x+6| = 7$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Résoudre l'équation $\sqrt{(1-5x)^2} = 2x-5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3.2 Inégalité triangulaire

Proposition 3.2 (Inégalité triangulaire)

Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

4 Partie entière

Définition 4.1 (Partie entière)

Pour tout réel x, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. L'entier n est appelé la **partie entière** de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$.

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$. La définition de la partie entière donne $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. L'entier $\lfloor x \rfloor$ est ainsi le plus grand entier inférieur à x.

Exemple. On a : $\lfloor 2,5 \rfloor = 2$, $\quad \lfloor 2 \rfloor = 2$, $\quad \lfloor -2,5 \rfloor = -3$, $\quad \lfloor 0,8 \rfloor = 0$.

Proposition 4.2 (Partie entière de la somme d'un réel et un entier)

Soit $n \in \mathbb{Z}$, et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lfloor n+x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor.$$

Remarque. Attention : la plupart des autres opérations que l'on pourrait vouloir effectuer avec la partie entière sont fausses. On ne peut notamment pas sommer dans le cas général, ni multiplier par un réel.

Exemple. $\left\lfloor 2\frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$ alors que $2\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 2 \times 0 = 0$, donc $\left\lfloor 2\frac{1}{2} \right\rfloor \neq 2\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$.

Exercice 12.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer un encadrement de $\lfloor y \rfloor$ en fonction de y.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente la limite de la suite $\left(\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 13. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor = 4$.