Petits systèmes et inégalités

Exercice 1 (★). Déterminer l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation $x + 2y = 3$. On l'écrira de deux façons, en utilisant deux paramétrages différents.

Exercice 2 (★). Résoudre à l'aide des opérations élémentaires les systèmes d'inconnues réelles (x, y, z) :

1. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 3 \\ x - 5y - 3z = -2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y - z = 8 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 8z = -2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 13 \\ 2x - 5y - 3z = -7 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 5y - 3z = 1 \end{cases}$

Exercice 3 (★). Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{1}{t} \leqslant -2$.

Exercice 4 (★). Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{1}{t} \leqslant 2t$.

Exercice 5 (★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \geqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 6 (★). Soit u la suite vérifiant $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in [0, 2]$.

Exercice 7 (★). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Encadrer au mieux $\frac{a}{b}$ (lorsque c'est possible, sinon on justifiera l'impossibilité), sachant que :

1. $\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 3 \leqslant b \leqslant 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 1 < a \leqslant 2 \\ 3 < b \leqslant 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 3 \leqslant b \leqslant 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ -3 \leqslant b \leqslant 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ 0 < b \leqslant 5 \end{cases}$

Exercice 8 (★★). Montrer que :

1. Pour tout $x \leqslant 0$, $\dfrac{e^x - x^2}{1 + x^2} \leqslant 1$.
2. Pour tout $x \geqslant 2$, $\dfrac{x^2 - 2}{x - 1} \geqslant 2$.

Exercice 9 (★★). Soit $a > 0$. Sans étudier les variations des fonctions suivantes, déterminer pour chacune un majorant et un minorant :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} [1, 10] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\sin(t)}{1+t^2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} [0, 3] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1-at}{2e^t-1} \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t^2+1) + \frac{3t}{a+t^2} \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{at^2}{1+e^t} - \frac{t^2}{a^2} \end{array}$

Exercice 10 (★★★). Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{2x + 22} \geqslant 1 - x$.

Exercice 11 (★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 1| \leqslant 4$.

Exercice 12 (★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $7 - 4x \leqslant |x + 5|$.

Exercice 13 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |i - j|$.

Exercice 14 (★). Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Exercice 15 (★★). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor (2x + 1)^2 \right\rfloor = 3$.

Exercice 16 (★★★)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Indication : introduire $B = \{i \in [\![0, n-1]\!] : x + \frac{i}{n} < \lfloor x \rfloor + 1\}$ et $k = \max(B)$.

Exercice 17 (Type DS)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{4 + u_n}}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2^n}$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.