# Petits systèmes et inégalités

**Exercice 1 (★).** Déterminer l'ensemble des solutions $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ de l'équation $x+2y=3$. On l'écrira de deux façons, en utilisant deux paramétrages différents.

**Résultat attendu :** L'ensemble des solutions vaut $\left\{\left(\lambda, \dfrac{3-\lambda}{2}\right)\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\} = \{(3-2\lambda,\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$.

**Exercice 2 (★).** Résoudre à l'aide des opérations élémentaires les systèmes d'inconnues réelles $(x,y,z)$ :

1. $\begin{cases} 2x+3y-2z=-5 \\ x+2y+z=3 \\ x-5y-3z=-2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y-z=8 \\ x+2y-3z=5 \\ 3x+2y-z=2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 3x-y+2z=0 \\ x-5y+8z=-2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x+2y-3z=13 \\ 2x-5y-3z=-7 \\ -x+2y+z=3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x+y-z=1 \\ 5y-3z=1 \end{cases}$

**Résultat attendu :**

1. L'unique solution est $x=2,\ y=-1,\ z=3$.
2. L'ensemble solution est $\{(\lambda,1-\lambda,\lambda-1)|\lambda\in\mathbb{R}\}$ ou $\{(1-\lambda,\lambda,-\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$ ou $\{(1+\lambda,-\lambda,\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$
3. Le système n'a pas de solution.
4. L'ensemble solution est $\{(\frac{1-\lambda}{7},\frac{3+11\lambda}{7},\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$ ou $\{(\frac{2-\lambda}{11},\lambda,\frac{7\lambda-3}{11})|\lambda\in\mathbb{R}\}$ ou $\{(\lambda,2-11\lambda,1-7\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$.
5. L'unique solution est $x=1,\ y=3,\ z=-2$.
6. L'ensemble solution est $\{(\lambda,3\lambda-1,5\lambda-2)|\lambda\in\mathbb{R}\}$ ou $\{(\frac{1+\lambda}{3},\lambda,\frac{-1+5\lambda}{3})|\lambda\in\mathbb{R}\}$ ou $\{(\frac{2+\lambda}{5},\frac{1+3\lambda}{5},\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$

**Exercice 3 (★).** Déterminer l'ensemble des $t\in\mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{1}{t}\leqslant -2$.

**Résultat attendu :** L'ensemble des solutions est $\left[-\frac{1}{2},0\right[$.

**Exercice 4 (★).** Déterminer l'ensemble des $t\in\mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{1}{t}\leqslant 2t$.

**Résultat attendu :** L'ensemble des solutions est $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right[\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$.

**Exercice 5 (★).** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}\geqslant\frac{1}{2}$.

**Résultat attendu :** Pour $k\in[\![1,n]\!]$ fixé, on montre $\frac{1}{k+n}\geqslant\frac{1}{2n}$. Sommer ces inégalités pour $k$ entre 1 et $n$ donne ensuite le résultat demandé.

**Exercice 6 (★).** Soit $u$ la suite vérifiant $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$. Montrer que $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k\in[0,2]$.

**Résultat attendu :** On montre le résultat par récurrence.

**Exercice 7 (★).** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $b\neq 0$. Encadrer au mieux $\frac{a}{b}$ (lorsque c'est possible, sinon on justifiera l'impossibilité), sachant que :

1. $\begin{cases} 1\leqslant a\leqslant 2 \\ 3\leqslant b\leqslant 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 1< a\leqslant 2 \\ 3< b\leqslant 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -1\leqslant a\leqslant 2 \\ 3\leqslant b\leqslant 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 1\leqslant a\leqslant 2 \\ -3\leqslant b\leqslant 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 1\leqslant a\leqslant 2 \\ 0< b\leqslant 5 \end{cases}$

**Résultat attendu :**

1. $\frac{1}{5}\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\frac{2}{3}$
2. $\frac{1}{5}<\frac{a}{b}<\frac{2}{3}$
3. $-\frac{1}{3}\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\frac{2}{3}$
4. Pas de bornes
5. $\frac{1}{5}\leqslant\frac{a}{b}$

**Exercice 8 (★★).** Montrer que :

1. Pour tout $x\leqslant 0$, $\dfrac{e^x-x^2}{1+x^2}\leqslant 1$.
2. Pour tout $x\geqslant 2$, $\dfrac{x^2-2}{x-1}\geqslant 2$.

**Résultat attendu :**

1. On procède par majoration directe.
2. On raisonne par équivalences pour se ramener à une inégalité plus simple à étudier.

**Exercice 9 (★★).** Soit $a > 0$. Sans étudier les variations des fonctions suivantes, déterminer pour chacune un majorant et un minorant :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} [1,10] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\ln(t)}{t} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{\sin(t)}{1+t^2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} [0,3] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1-at}{2e^t-1} \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(t^2+1) + \frac{3t}{a+t^2} \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{at^2}{1+e^t} - \frac{t^2}{a^2} \end{array}$

**Résultat attendu :**

1. Un minorant est 0, un majorant est $\ln(10)$.
2. Un minorant est $-1$, un majorant est 1.
3. Un minorant est $\frac{1}{2e^3-1} - 3a$, un majorant est 1.
4. Un minorant est $\frac{-3}{a}$, un majorant est $\frac{3}{a} + \ln(2)$.
5. Un minorant est $-\frac{1}{a^2}$, un majorant est $\frac{a}{1+e^{-1}}$.

**Exercice 10 (★★★).** Trouver toutes les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{2x+22} \geqslant 1-x$.
**Résultat attendu :** L'ensemble des solutions est $[-3, +\infty[$.

**Exercice 11 (★).** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+1| \leqslant 4$.
**Résultat attendu :** On montre par équivalences que l'ensemble des solutions est $[-5, 3]$.

**Exercice 12 (★).** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $7 - 4x \leqslant |x+5|$.
**Résultat attendu :** On montre par équivalences que l'ensemble des solutions est $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right[$.

**Exercice 13 (★★).** Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |i-j|$.

**Résultat attendu :** $S = \ldots = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \left( j^2 - nj + \frac{n^2+n}{2} \right) = \ldots = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

**Exercice 14 (★).** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

**Résultat attendu :** On montre que $\dfrac{(n+1)x}{2n} - \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \dfrac{(n+1)x}{2n}$, donc la limite vaut $\dfrac{x}{2}$ par théorème d'encadrement.

**Exercice 15 (★★).** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left\lfloor (2x+1)^2 \right\rfloor = 3$.
**Résultat attendu :** On montre par équivalences que l'ensemble des solutions est $\left]-\frac{3}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

**Exercice 16 (★★★).** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Indication : introduire $B = \{i \in [\![0, n-1]\!] : x + \frac{i}{n} < \lfloor x \rfloor + 1\}$ et $k = \max(B)$.
**Résultat attendu :** Calculer séparément la somme de $i = 0$ à $k$, puis la somme de $i = k+1$ à $n-1$ donne pour la somme totale une valeur de $n \lfloor x \rfloor + n - k - 1$. Il faut ensuite utiliser la définition du maximum pour simplifier cette expression.

**Exercice 17** (Type DS)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{4+u_n}}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2^n}$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Résultat attendu :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ : « $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{4+u_n}}$ ».
   - On a $\dfrac{3}{2^0} = \dfrac{3}{1} = 3$ et $u_0 = 3$, donc $u_0 \leqslant \dfrac{3}{2^0}$. Donc $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Alors $0 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2^n}$.

     On en déduit que $4 \leqslant u_n + 4$, et par croissance de la racine sur $\mathbb{R}_+$, $2 \leqslant \sqrt{u_n+4}$. Comme tout est strictement positif, un passage à l'inverse donne $0 < \dfrac{1}{\sqrt{u_n+4}} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

     Or $0 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2^n}$ par $P(n)$. Donc par produit d'inégalités (possible car tous les termes sont positifs), $0 < \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+4}} \leqslant \dfrac{3}{2^n} \times \dfrac{1}{2}$. Donc $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{2^{n+1}}$ et $P(n+1)$ est vraie.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2^n}$.

2. D'après la question 1, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{3}{2^n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2^n} = 0$ car $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$.

   Donc par théorème d'encadrement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.