Sommes et produits

Cours de É. Bouchet – PCSI

3 octobre 2025

Table des matières

1 Sommes

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Somme)

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leqslant n$ et u une suite de réels, on note $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i$.

Remarque. La somme $\sum_{i=p}^{n} u_i$ contient $n-p+1$ termes.

Remarque. Dans le cas où $p > n$, on pose $\sum_{i=p}^{n} u_i = 0$ par convention.

Définition 1.2 (Indice, bornes)

Dans la somme $\sum_{i=p}^{n} u_i$, i s'appelle **l'indice**, p et n sont **les bornes** de la somme.

Remarque. L'indice d'une somme est dit muet, ce qui signifie que l'on peut écrire : $\sum_{i=p}^{n} u_i = \sum_{j=p}^{n} u_j$.

Remarque. On peut aussi noter $\sum_{p \leqslant k \leqslant n} u_k$ ou $\sum_{k \in A} u_k$ avec A un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$. On a par exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} u_k.$$

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, simplifier les écritures suivantes : $\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ termes}}$, puis $\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n \text{ termes}}$, puis $2+4+6+\ldots+2n$, puis $1+3+5+\ldots+(2n+1)$, puis $1+3+5+\ldots+2013$.
Solution :

$$\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ termes}} = \sum_{i=1}^{n} 1, \quad \underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n \text{ termes}} = \sum_{i=1}^{n} a, \quad 2+4+6+\ldots+2n = \sum_{i=1}^{n} 2i,$$

$$1+3+5+\ldots+(2n+1) = \sum_{i=0}^{n} (2i+1), \quad 1+3+5+\ldots+2013 = \sum_{i=0}^{1006} (2i+1).$$

Remarque. On déduit entre autres de ces écritures que $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant p$, $\sum_{k=p}^{n} 1 = n-p+1$.

1.2 Premiers calculs de sommes

Proposition 1.3 (Somme des premiers entiers)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

— $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0\times 1}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0\times 1\times 1}{6}$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right).$$

Or $\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1 = \frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

On a donc montré le résultat annoncé. □

Remarque. Ces formules restent vraies en faisant partir les sommes de 1, puisque les termes en 0 sont nuls.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k^2$.

Solution : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{11} k^2$.

Solution : $\displaystyle\sum_{k=2}^{11} k^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2 - 1^2 = \frac{11\times 12\times 23}{6} - 1 = 11\times 2\times 23 - 1 = 506 + 1 = 505$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{j=3}^{n+1} j^2$.

Solution : $\displaystyle\sum_{j=3}^{n+1} j^2 = \sum_{j=1}^{n+1} j^2 - 1^2 - 2^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} - 5 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 5$.

Proposition 1.4 (Linéarité de la somme)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et x, y des suites de réels. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (x_k + \lambda y_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \lambda \sum_{k=p}^{n} y_k$.

Démonstration. Si $n < p$, les sommes sont nulles donc égales. Sinon, il suffit de se ramener à l'écriture avec des points de suspension :

$$\sum_{k=p}^{n}(x_k+\lambda y_k) = x_p+\lambda y_p+x_{p+1}+\lambda y_{p+1}+\ldots+x_n+\lambda y_n = x_p+x_{p+1}+\ldots+x_n+\lambda y_p+\lambda y_{p+1}+\ldots+\lambda y_n = \sum_{k=p}^{n} x_k+\lambda\sum_{k=0}^{n} y_k.$$

□

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-2)$.

Solution : Par linéarité, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 - 2\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n-5)}{6}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} ki\right)$.

Solution : Par linéarité, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} ki\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(i\sum_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(i\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{m} i = \frac{n(n+1)m(m+1)}{4}$.

1.3 Changements d'indices et regroupements de termes

Proposition 1.5 (Changements d'indices)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, u une suite de réels et $k \in \mathbb{Z}$.

— En posant $j = i + k$, on effectue un **changement d'indice par translation** : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_{i+k} = \sum_{j=p+k}^{n+k} u_j$.

— En posant $j = k - i$, on effectue un **changement d'indice par retournement** : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_{k-i} = \sum_{j=k-n}^{k-p} u_j$.

Remarque. ATTENTION : il est interdit de « sauter » des indices, par exemple de poser $k = 2i$ (ce qui reviendrait à ne prendre que les termes pairs).

Démonstration. Si $n < p$, les sommes sont nulles donc égales.

Sinon, on a d'une part : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_{i+k} = u_{p+k} + u_{p+1+k} + \ldots + u_{n+k} = \sum_{j=p+k}^{n+k} u_j$, et d'autre part :

$$\sum_{i=p}^{n} u_{k-i} = u_{k-p} + u_{k-p-1} + \ldots + u_{k-n} = u_{k-n} + \ldots + u_{k-p-1} + u_{k-p} = \sum_{j=k-n}^{k-p} u_j.$$

□

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$.

Solution : Poser $j = k - 1$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n-i)^2$.

Solution : Poser $j = n - i$ donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n-i)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

Proposition 1.6 (Regroupements des indices pairs et impairs)

Soit $n \in \mathbb{N}$, et u une suite de réels, $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n} u_p = \sum_{p=0}^{n} u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}$.

Démonstration.

$$\sum_{p=0}^{2n} u_p = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2n-1} + u_{2n} = (u_0 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1}) = \sum_{p=0}^{n} u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}.$$

□

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{2n} k(-1)^k$.

Solution : Regrouper les indices pairs et impairs donne :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k(-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)(-1)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 2k - \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k - 2\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1,$$

d'où (en simplifiant entre elles les sommes identiques) $S_n = 2n - (n-1-0+1) = 2n - n = n$.

1.4 Télescopages

Proposition 1.7 (Somme télescopique)

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tous entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$, on a $\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$.

Démonstration. On développe par linéarité, puis simplifie grâce à un changement d'indice :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n} u_k \\
&= \sum_{i=p+1}^{n+1} u_i - \sum_{k=p}^{n} u_k \quad \text{en posant } i = k+1 \\
&= u_{n+1} + \sum_{i=p+1}^{n} u_i - u_p - \sum_{k=p+1}^{n} u_k \\
\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) &= u_{n+1} - u_p
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque. Cette formule s'adapte de manière directe à toute différence de termes consécutifs. En particulier,

$$\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_{p-1}.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Solution : On procède par télescopage, mais il faut commencer par les faire apparaître :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k+1} - \left(-\frac{1}{k}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

1.5 Sommes et puissances

Proposition 1.8 (Somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. Si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$, sinon $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$, si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ car la somme contient $n+1$ termes.
Si $q \neq 1$, on trouve par télescopage :

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) = -q^{n+1} - (-1) = 1 - q^{n+1}.$$

En divisant par $1-q \neq 0$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. □

Remarque. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$ Soit $q \neq 1$. On peut montrer de même que :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} = q^p \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}.$$

Ce résultat se retrouve par changement d'indice en posant $j = k-p$: $\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{j=0}^{n-p} q^{j+p} = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{2^k}$.

Solution : $S = 6\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 6\frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 6\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2-1} = 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $T = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^k}$.

Solution : $T = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3}} = 3 - \frac{2^{n+1}}{3^n}$.

Proposition 1.9 (Identité remarquable)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$.

Démonstration. On procède par linéarité puis télescopage :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{n-k}b^k - a^{n-(1+k)}b^{k+1}\right) = a^{n-0}b^0 - a^{n-(1+n-1)}b^{n-1+1} = a^n - b^n.$$

□

Remarque. Contrairement aux précédentes, cette formule est davantage utilisée dans le sens qui fait apparaître la somme, pour factoriser par $a-b$.

Exemple. On a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, ainsi que $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.

1.6 Sommes doubles

Lorsqu'on a une somme double où les indices des deux sommes ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut intervertir les sommes, et donc sommer dans l'ordre qu'on préfère (c'est le cas notamment de la somme de l'exercice 6). Ce n'est pas le cas si les indices dépendent l'un de l'autre.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$.

<u>Solution :</u> On commence par chercher l'expression la plus simple : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} i = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} i$ (ces formules s'obtiennent par exemple en dessinant un triangle où i est en abscisse et j en ordonnée). Ici, la deuxième expression permet de se ramener facilement aux formules de cours :

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} i\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j\\
&= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{1}{4}n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)\\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(2n+4)\\
\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).
\end{aligned}$$

Remarque. La notation $\displaystyle\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n}$ signifie que i et j varient entre p et n sans dépendre l'un de l'autre.

Proposition 1.10 (Produit de sommes)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et a, b deux suites de réels, alors $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) = \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant p}} a_j b_i.$

Démonstration. Il suffit de développer :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) &= a_0\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) + a_1\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right) + \ldots + a_n\left(\sum_{i=0}^{p} b_i\right)\\
&= a_0b_0 + a_0b_1 + \ldots + a_0b_p + a_1b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_1b_p + \ldots + a_nb_0 + a_nb_1 + \ldots + a_nb_p\\
&= \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant p}} a_j b_i.
\end{aligned}$$

□

Remarque. En particulier, $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)^2 = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + 2\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} a_j a_i$. En effet,

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)^2 = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_j a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} a_j a_i + \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} a_j a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + 2\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} a_j a_i.$$

Exemple. Cette formule permet de développer facilement des expressions usuelles. Par exemple,

$$(a_1+a_2+a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3.$$

2 Produits

2.1 Généralités

Définition 2.1 (Produit)

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leqslant n$ et u une suite de réels, on note $u_p \times u_{p+1} \times \ldots \times u_n = \prod_{i=p}^{n} u_i$.

Remarque. Dans le cas où $p > n$, on pose $\prod_{i=p}^{n} u_i = 1$ par convention.

Remarque. Comme dans le cas des sommes, il est possible d'effectuer des changements d'indice sur des produits. On retrouve également le nombre de termes : le produit $\prod_{i=p}^{n} u_i$ contient $n-p+1$ termes.

Proposition 2.2 (Produit télescopique)

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. Pour tous entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$, on a $\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$.

Démonstration. On développe puis simplifie grâce au changement d'indice $i = k+1$:

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} u_{k+1}}{\prod_{k=p}^{n} u_k} = \frac{\prod_{i=p+1}^{n+1} u_i}{\prod_{k=p}^{n} u_k} = \frac{u_{n+1} \times \prod_{i=p+1}^{n} u_i}{u_p \times \prod_{k=p+1}^{n} u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}.$$

□

Exercice 14. Soit $n \geqslant 2$, calculer $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

<u>Solution :</u> On trouve par télescopage : $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$.

Remarque. Attention : il n'y a pas de linéarité du produit.

Proposition 2.3 (Multiplication par une constante)

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$ et $u_p, \ldots, u_n$ des réels. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\prod_{k=p}^{n} (\lambda u_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} u_k$.

Démonstration. On trouve par calcul $\prod_{k=p}^{n} (\lambda u_k) = \lambda u_p \times \lambda u_{p+1} \times \cdots \times \lambda u_n = \lambda^{n-p+1} \times u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_n$. □

2.2 Factorielle

Définition 2.4 (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** n la quantité : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$.

Exemple. $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120.$

Remarque. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.
Toute autre formule pour simplifier des notations factorielles est fausse, on ne peut notamment pas simplifier $(2n)!$

Exercice 15. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k}$ à l'aide de la notation factorielle.

Solution :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{4} \times \cdots \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-2}{2p-2} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p}{2p} \\
&= \frac{(2p)!}{2^{2p} \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \times (p-1) \times p \times p} \\
\prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.
\end{aligned}$$

3 Coefficients binomiaux

3.1 Premiers calculs

Définition 3.1 (Coefficients binomiaux)

Soit $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$.

- Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$ on pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$.
- Si $n < 0$ ou $p \notin [\![0, n]\!]$ on pose $\dbinom{n}{p} = 0$.

Remarque. En particulier, si $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$. Si de plus $n \neq 0$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\times 2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 16. Calculer $\binom{8}{4}$.
Solution : Un calcul direct donne $\binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4} = 7 \times 2 \times 5 = 70$.

Exercice 17. Calculer $\binom{9}{3}$.
Solution : Un calcul direct donne $\binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{1\times2\times3} = 3 \times 4 \times 7 = 84$.

Proposition 3.2 (Formule de Pascal)

$\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$.

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$, on a aussi $p - 1 \in [\![0, n-1]\!]$ et :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} \\
&= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}\left(1 + \frac{p}{n-p}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!}\left(\frac{n}{n-p}\right) \\
\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = 0$, $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{-1} = \binom{n-1}{0} + 0 = 1 = \binom{n}{0}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = n$, $\binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1} = 0 + 1 = 1 = \binom{n}{n}$.
Dans tous les autres cas, les deux membres de la formule sont nuls dont égaux.
La formule est donc vraie pour tout couple d'entiers différent de $(0, 0)$. □

Remarque. Le tableau suivant, appelé triangle de Pascal, permet de retrouver facilement les petits coefficients binomiaux :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

3.2 Propriétés et formules

Proposition 3.3 (Symétrie)

$\forall (n, p) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Exemple. $\binom{8}{2} = \binom{8}{8-2} = \binom{8}{6}$.

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors $n - p \in [\![0, n]\!]$, et la définition donne : $\displaystyle\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$.
Sinon, les deux termes sont nuls. Dans tous les cas, il y a donc égalité. □

Proposition 3.4 (Formule "sans nom")

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $\forall p \in \mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Remarque. On peut rencontrer cette relation sous l'appellation « formule du pion », « formule du capitaine », « identité d'absorption » et d'autres encore... Aucun de ces noms n'est cependant au programme.

Démonstration. Si $n \geqslant 1$ et $p \in [\![1, n]\!]$ (sinon, les termes sont nuls donc égaux), on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p}\,\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1},$$

où la dernière égalité est valide car on a bien $p - 1 \in [\![0, n-1]\!]$. □

Proposition 3.5 (Formule du binôme de Newton)

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : \displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

— $(a+b)^0 = 1$, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} && \text{par } P(n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} && \text{en posant } i=k+1\\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1} && \text{en séparant } i=n+1 \text{ et } k=0\\
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} && \text{par la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Cela montre le résultat annoncé. □

Exercice 18. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $(1+x)^4$.
Solution : La formule du binôme de Newton donne :

$$(1+x)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^1 + \binom{4}{4}x^0 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

Solution : La formule du binôme de Newton donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

Solution : On sait que pour tout entier k non nul, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = 0 + \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n2^{n-1},$$

où on a posé $i = k-1$ puis utilisé la formule du binôme de Newton.