Trigonométrie

Cours de É. Bouchet – PCSI

3 septembre 2025

Table des matières

1 Formules trigonométriques

1.1 Prérequis

Définition 1.1 (Congruence modulo 2π)

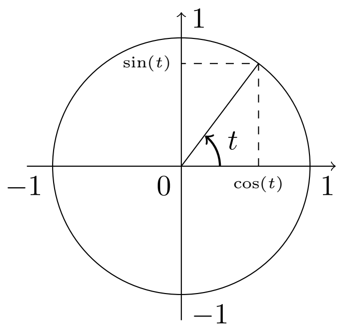
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que a **est congru à** b **modulo** 2π quand il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + 2k\pi$.
On le note $a \equiv b[2\pi]$.

Exemple. $4\pi \equiv 0[2\pi]$ puisque $4\pi = 0 + 2 \times 2\pi$, $\frac{5\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ puisque $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$.

Définition 1.2 (Cercle trigonométrique)

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 et de centre l'origine O du repère, dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé.

Remarque. Puisque le rayon du cercle est de 1, la définition géométrique de sinus et cosinus (côté opposé sur hypoténuse, côté adjacent sur hypoténuse) permet d'observer que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées du type $(\cos(t), \sin(t))$.



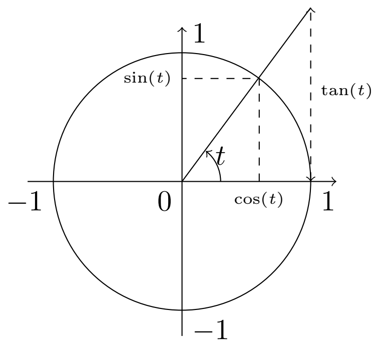
Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$, le cercle trigonométrique permet de retrouver directement les relations classiques de périodicité : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
On en déduit en particulier que si $t \equiv x[2\pi]$, $\cos(t) = \cos(x)$ et $\sin(t) = \sin(x)$.

Définition 1.3 (Tangente)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$. On définit alors la **tangente** de x par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$, on a $\tan(x + 2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$, on retrouve donc ici aussi une périodicité de période 2π.

Remarque. Le théorème de Thalès permet de représenter la tangente sur le cercle trigonométrique :



(les lignes en pointillés verticales sont parallèles, le théorème de Thalès vérifie donc bien la relation $\frac{\cos(t)}{1} = \frac{\sin(t)}{\tan(t)}$).

1.2 Transformations affines et valeurs usuelles

Proposition 1.4 (Transformations affines de sinus et cosinus)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x),$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x),$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x).$$

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier l'expression $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x)$.

Proposition 1.5 (Transformations affines de tangente)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$,

$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \tan(\pi + x) = \tan(x), \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x).$$

Remarque. Cela montre au passage que la fonction tangente est périodique de période π.

Proposition 1.6 (Valeurs usuelles à connaître)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(t)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND

Remarque. Les autres valeurs usuelles se déduisent de celles-là grâce aux formules de transformation affine, quitte à retracer le cercle trigonométrique.

Exercice 2. Déterminer les valeurs de $\cos(\frac{5\pi}{6})$ et $\sin(\frac{5\pi}{6})$.

1.3 Quelques équations trigonométriques

Proposition 1.7 (Équations en sinus ou cosinus)

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(x) = \cos(y) \iff x \equiv y[2\pi] \text{ ou } x \equiv -y[2\pi],$$

$$\sin(x) = \sin(y) \iff x \equiv y[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y[2\pi].$$

Remarque. Attention à ne pas oublier le deuxième cas dans l'étude !

Exercice 3. Déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4. Déterminer les solutions dans $[-\pi, \pi]$ de l'équation $2\cos(4x) + 1 = 0$.

1.4 Formules d'addition

Proposition 1.8 (Formules d'addition)

Soit a et b réels, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Remarque. On en déduit directement les trois formules suivantes (non-exigibles, mais qu'il faut savoir retrouver rapidement) :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2},$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2},$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}.$$

Exercice 5. Soit $t \in [-\pi, \pi]$. En factorisant $\cos(t) + \cos(2t)$, déterminer le signe de cette expression.

Proposition 1.9 (Formules de duplication)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Proposition 1.10 (Formules de linéarisation du carré)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

Remarque. Ces formules sont particulièrement utiles pour calculer des primitives de $\cos^2$ et $\sin^2$ (puisqu'on ne sait pas primitiver un produit).

Proposition 1.11 (Formules d'addition de tangente)

Pour tous réels a et b pour lesquels les termes suivants sont bien définis, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

Remarque. Les conditions de bonne définition sont les suivantes :
- a et b sont différents de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π (pour la bonne définition de $\tan(a)$ et $\tan(b)$),
- $a+b$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π (pour la première égalité),
- $a-b$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π (pour la seconde égalité).

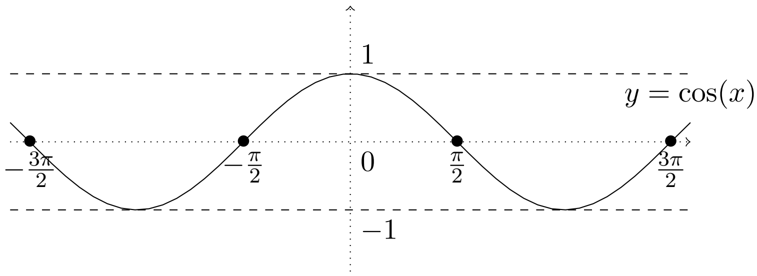
2 Fonctions circulaires

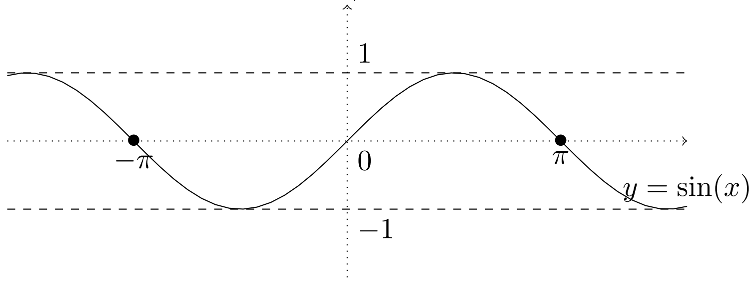
2.1 Cosinus, sinus

Proposition 2.1 (Symétries de sinus et cosinus)

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et c'est une fonction impaire.
La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et c'est une fonction paire.

Remarque. On en déduit les représentations graphiques :

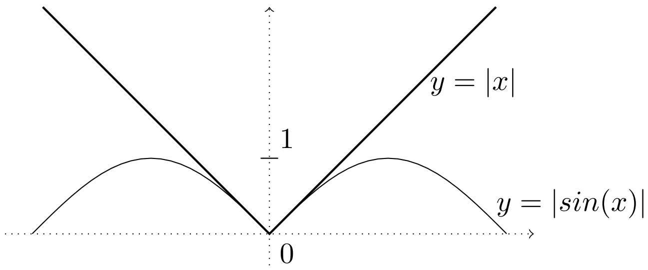




Proposition 2.2 (Inégalité classique du sinus)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$

Remarque. Graphiquement, cela donne :



Proposition 2.3 (Dérivée de sinus et cosinus)

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Exercice 6. Soit $t \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin(3t)\cos(2t)$. En déduire une primitive de $t \mapsto \sin(3t)\cos(2t)$ sur $\mathbb{R}$.

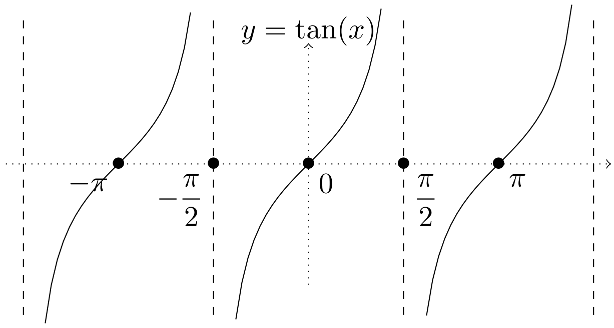
2.2 Tangente

Définition 2.4 (Tangente)

La fonction **tangente** est la fonction définie sur $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ par : $\forall x \in I$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Remarque. L'écriture $I = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ fonctionne également.

Remarque. On sait déjà que la fonction tangente est périodique de période π et impaire, ce qui aide à construire sa représentation graphique :



Proposition 2.5 (Dérivée de tangente)

La fonction tangente est dérivable sur $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, et $\forall x \in I$, $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.