Exercices PCSI
É.Bouchet

Trigonométrie

Exercice 1 (★). Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$
3. $\sin(t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$
4. $\cos(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (★). Résoudre les équations suivantes dans $[0, 2\pi]$:

1. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}$
3. $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$
4. $\sin(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Exercice 3 (★★). Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\tan(x) = -1$.

Exercice 4 (★★). Résoudre les inéquations suivantes par lecture graphique sur le cercle trigonométrique :

1. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$
3. $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$
4. $\cos(t) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Exercice 5 (★). Résoudre l'équation $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{2}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'équation $\sin(nt) = 0$ d'inconnue t.

1. Déterminer les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 7 (★★). Résoudre l'équation $\cos(2x) = \sin(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 (★★). Résoudre l'équation $\sin(t) = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ pour $t \neq \pi + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9 (★). Soit $t \in [0, \pi]$. En utilisant les formules trigonométriques pour se ramener à un produit, déterminer le signe de $\sin(4t) + \sin(2t)$.

Exercice 10 (★). Soit $t \in [0, \pi]$. En utilisant les formules trigonométriques pour se ramener à un produit, déterminer le signe de $\cos(3t) + \cos(t)$.

Exercice 11 (★). Pour $t \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^2(2t)$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)dt$.

Exercice 12 (★). Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin(\theta)\sin(3\theta)$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta)\sin(3\theta)d\theta$.

Exercice 13 (★★★). On pose $\forall n \geqslant 2, u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.
Déterminer pour tout $n \geqslant 2$ une expression simplifiée de u_n en fonction de n.
Indication : utiliser plusieurs fois de suite la formule qui donne $\sin(2x)$.

Exercice 14 (Type DS)**.** On souhaite résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire que x est solution de (E) si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
3. En déduire les solutions de (E).