Trigonométrie

Exercice 1 (★). Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(t) = \frac{1}{2}$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin(t) = \frac{1}{2}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$
3. $\sin(t) = \frac{1}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$
4. $\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Résultat attendu :

1. L'unique solution est $t = \frac{\pi}{6}$.
2. Les solutions sont $t = \frac{\pi}{6}$ ou $t = \frac{5\pi}{6}$.
3. Les solutions sont $t \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $t \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.
4. Les solutions sont $t \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$ ou $t \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice 2 (★). Résoudre les équations suivantes dans $[0, 2\pi]$:

1. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$
3. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$
4. $\sin(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Résultat attendu : Les ensembles de solutions sont :

1. $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$
2. $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$
3. $\left\{\frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}\right\}$
4. $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Exercice 3 (★★). Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\tan(x) = -1$.
Résultat attendu : On revient à la définition de tangente, puis on se ramène à une égalité de deux cosinus ou deux sinus. L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

Exercice 4 (★★). Résoudre les inéquations suivantes par lecture graphique sur le cercle trigonométrique :

1. $\sin(t) \leqslant \frac{1}{2}$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin(t) \leqslant \frac{1}{2}$ pour $t \in [-\pi, \pi]$
3. $\sin(t) \leqslant \frac{1}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$
4. $\cos(t) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

Résultat attendu :

1. L'ensemble solution est $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$.
2. L'ensemble solution est $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.
3. L'ensemble solution est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$ ou $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[\right)$.
4. L'ensemble solution est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$ ou $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[\right)$.

Exercice 5 (★). Résoudre l'équation $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
Résultat attendu : L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 6 (★★). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'équation $\sin(nt) = 0$ d'inconnue t.

1. Déterminer les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation sur $[-\pi, \pi]$.

Résultat attendu :

1. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est $\left\{\frac{k\pi}{n} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. L'ensemble des solutions sur $[-\pi, \pi]$ est $\left\{\frac{k\pi}{n} \middle| k \in [\![-n, n]\!]\right\}$.

Exercice 7 (★★). Résoudre l'équation $\cos(2x) = \sin(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Résultat attendu : On se ramène à une relation qui ne porte que sur sinus, ou que sur cosinus. L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 8 (★★). Résoudre l'équation $\sin(t) = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour $t \neq \pi + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Résultat attendu : On se ramène à une relation qui ne porte que sur sinus, ou que sur cosinus. L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 9 (★). Soit $t \in [0, \pi]$. En utilisant les formules trigonométriques pour se ramener à un produit, déterminer le signe de $\sin(4t) + \sin(2t)$.
Résultat attendu : On trouve $\sin(4t) + \sin(2t) = 2\sin(3t)\cos(t)$ ou $\sin(4t) + \sin(2t) = \sin(2t)\,(2\cos(2t) + 1)$.
L'expression est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

Exercice 10 (★). Soit $t \in [0, \pi]$. En utilisant les formules trigonométriques pour se ramener à un produit, déterminer le signe de $\cos(3t) + \cos(t)$.
Résultat attendu : On trouve $\cos(3t) + \cos(t) = 2\cos(2t)\cos(t)$.
L'expression est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Exercice 11 (★). Pour $t \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^2(2t)$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)dt$.
Résultat attendu : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(2t) = \dfrac{1 - \cos(4t)}{2}$, ce qui permet de calculer $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 12 (★). Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin(\theta)\sin(3\theta)$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta)\sin(3\theta)d\theta$.
Résultat attendu : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta)\sin(3\theta) = \dfrac{\cos(2\theta) - \cos(4\theta)}{2}$, ce qui permet de calculer $I = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 13 (★★★). On pose $\forall n \geqslant 2, u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.
Déterminer pour tout $n \geqslant 2$ une expression simplifiée de u_n en fonction de n.
Indication : utiliser plusieurs fois de suite la formule qui donne $\sin(2x)$.
Résultat attendu : On remarque que $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) u_n$ se simplifie récursivement en utilisant la formule de duplication du sinus. Cela permet de montrer que $\forall n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{2^{1-n}}{\sin(\frac{\pi}{2^n})}$.

Exercice 14 (Type DS)**.** On souhaite résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire que x est solution de (E) si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
3. En déduire les solutions de (E).

Résultat attendu :

1. Le cours donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0 &\iff 1 - \cos(x) + (2\cos^2(x) - 1) = 0 \\ &\iff 2\cos^2(x) - \cos(x) = 0 \\ &\iff \cos(x)(2\cos(x) - 1) = 0 \\ 1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0 &\iff \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Donc x est solution de (E) si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
3. Si $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \iff x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi].$$

   L'ensemble des solutions de (E) est donc : $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.