Applications

Exercice 1 (★). Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. Une restriction au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
2. Une restriction au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.
3. Un prolongement au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
4. Un prolongement au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.

Exercice 2 (★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+y) \end{array}$.

1. Déterminer les images par f de $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 2)$.
2. Déterminer les images par g de $F = (2, 0, 1)$ et $G = (-3, 1, 2)$.
3. Déterminer les antécédents par f de F et G.
4. Déterminer les antécédents par g de A et B.
5. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
6. Définir les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 3 (★). Les applications suivantes sont-elles bien définies ? injectives ? surjectives ?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \{-1, 1\} & \to & \mathbb{Z} \\ (a,s) & \mapsto & s \times a \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{Q} \\ (a,b) & \mapsto & \dfrac{a}{b} \end{array}$

Exercice 4 (★). Soit $g : \begin{array}{cc} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, x-y, x) \end{array}$.
En raisonnant par équivalences, montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque g^{-1}.

Exercice 5 (★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, x-y) \end{array}$. La fonction f est-elle bijective ? Si oui, définir f^{-1}.

Exercice 6 (★★). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 7 (★★). Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que f est bijective pour un ensemble J à déterminer. Expliciter ensuite sa réciproque f^{-1}.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ t & \mapsto & 1+e^t \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & J \\ s & \mapsto & \dfrac{-1}{2}s - 1 \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ t & \mapsto & t+t^2 \end{array}$

Exercice 8 (★★). On pose la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2}+1 \end{array}$.
Note : ici, e^{x^2} désigne le nombre $\exp(x^2)$ *et pas* $(\exp(x))^2$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser, ainsi qu'une bijection de $\mathbb{R}_-$ dans J. On explicitera les applications réciproques de ces deux bijections.

Exercice 9 (★★). Soit a une application définie de E dans F et b une application définie de F dans G.

1. Prouver que : $b \circ a$ injective de E dans $G \Longrightarrow a$ injective de E dans F.
2. Prouver que : $b \circ a$ surjective de E dans $G \Longrightarrow b$ surjective de F dans G.

Exercice 10 (★★★). Soit f une application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est bijective et croissante. Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 11 (★★★)**.** Soit A et B deux ensembles non vides de E et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit surjective.
3. Quand f est bijective, déterminer sa réciproque.

Exercice 12 (Type DS)**.** On s'intéresse à l'application $h : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$.

1. La fonction h est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $h_1 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$. Montrer que h_1 est bijective et déterminer h_1^{-1}.
3. Soit $h_2 : \begin{array}{ccc} [-1,0] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array}$. Montrer que h_2 est bijective et déterminer h_2^{-1}.