Trigonométrie

Cours de É. Bouchet – PCSI

29 septembre 2025

Table des matières

1 Formules trigonométriques

1.1 Prérequis

Définition 1.1 (Congruence modulo 2π)

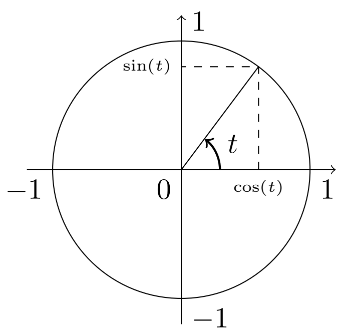
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que a **est congru à** b **modulo** 2π quand il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + 2k\pi$.
On le note $a \equiv b[2\pi]$.

Exemple. $4\pi \equiv 0[2\pi]$ puisque $4\pi = 0 + 2 \times 2\pi$, $\frac{5\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ puisque $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$.

Définition 1.2 (Cercle trigonométrique)

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 et de centre l'origine O du repère, dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé.

Remarque. Puisque le rayon du cercle est de 1, la définition géométrique de sinus et cosinus (côté opposé sur hypoténuse, côté adjacent sur hypoténuse) permet d'observer que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées du type $(\cos(t), \sin(t))$.



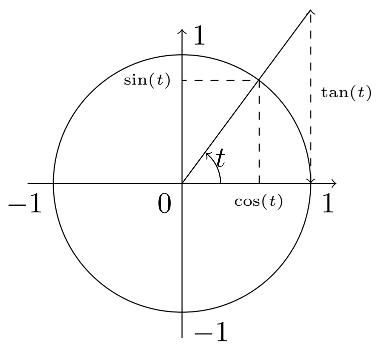
Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$, le cercle trigonométrique permet de retrouver directement les relations classiques de périodicité : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
On en déduit en particulier que si $t \equiv x[2\pi]$, $\cos(t) = \cos(x)$ et $\sin(t) = \sin(x)$.

Définition 1.3 (Tangente)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$. On définit alors la **tangente** de x par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$, on a $\tan(x + 2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$, on retrouve donc ici aussi une périodicité de période 2π.

Remarque. Le théorème de Thalès permet de représenter la tangente sur le cercle trigonométrique :



(les lignes en pointillés verticales sont parallèles, le théorème de Thalès vérifie donc bien la relation $\frac{\cos(t)}{1} = \frac{\sin(t)}{\tan(t)}$).

1.2 Transformations affines et valeurs usuelles

Proposition 1.4 (Transformations affines de sinus et cosinus)

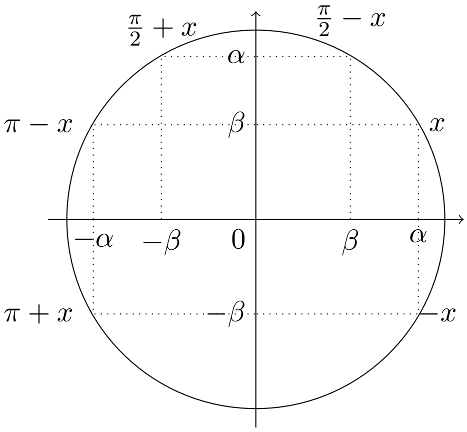
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x),$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x), \quad \sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x),$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x).$$

Démonstration. Les égalités pour sinus et cosinus se lisent directement sur le cercle trigonométrique (on pose $\alpha = \cos(x)$ et $\beta = \sin(x)$ pour gagner en lisibilité sur la figure) :



□

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier l'expression $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x)$.
<u>Solution :</u> D'après les formules précédentes, $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(x) - \sin(x) = 0$.

Proposition 1.5 (Transformations affines de tangente)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) \neq 0$,

$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \tan(\pi + x) = \tan(x), \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x).$$

Démonstration. Ces relations se déduisent des précédentes : $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$,

$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x), \quad \tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x).$$

□

Remarque. Cela montre au passage que la fonction tangente est périodique de période π.

Proposition 1.6 (Valeurs usuelles à connaître)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(t)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND

Remarque. Les autres valeurs usuelles se déduisent de celles-là grâce aux formules de transformation affine, quitte à retracer le cercle trigonométrique.

Exercice 2. Déterminer les valeurs de $\cos(\frac{5\pi}{6})$ et $\sin(\frac{5\pi}{6})$.
Solution : $\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

1.3 Quelques équations trigonométriques

Proposition 1.7 (Équations en sinus ou cosinus)

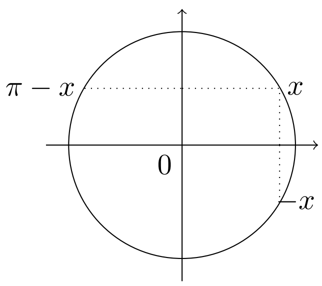
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(x) = \cos(y) \iff x \equiv y[2\pi] \text{ ou } x \equiv -y[2\pi],$$

$$\sin(x) = \sin(y) \iff x \equiv y[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y[2\pi].$$

Remarque. Attention à ne pas oublier le deuxième cas dans l'étude !

Démonstration. Ces résultats se lisent directement sur le cercle trigonométrique :



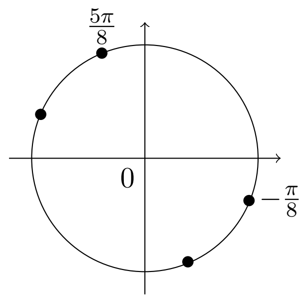
□

Exercice 3. Déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} &\iff 2x \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \pi + \frac{\pi}{4}[2\pi] \\
&\iff 2x \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi] \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi
\end{aligned}$$

$$\iff x \in \left\{-\frac{\pi}{8} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{8} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$$

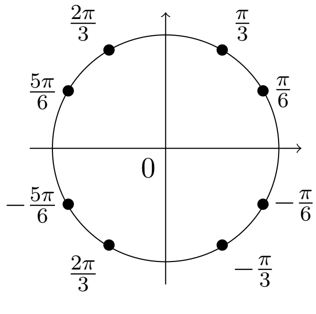
L'ensemble des solutions est donc $\left\{-\frac{\pi}{8} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{8} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$. Sur le cercle trigonométrique, cela correspond aux points :



Exercice 4. Déterminer les solutions dans $[-\pi, \pi]$ de l'équation $2\cos(4x) + 1 = 0$.
<u>Solution :</u> Soit $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}
2\cos(4x) + 1 = 0 &\iff \cos(4x) = -\frac{1}{2} \\
&\iff 4x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 4x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 4x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\
&\iff x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}\right\} \text{ ou } x \in \left\{-\frac{4\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\} \\
&\iff x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. Sur le cercle trigonométrique, cela correspond aux points :



1.4 Formules d'addition

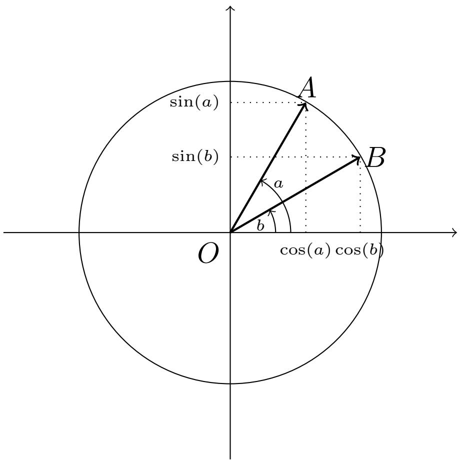
Proposition 1.8 (Formules d'addition)

Soit a et b réels, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Démonstration. On utilise les résultats de lycée sur le produit scalaire :



$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OA}\| \cos(a-b) = 1 \times 1 \times \cos(a-b) = \cos(a-b).$$

Or $\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(\cos(b), \sin(b))$ et $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$, donc on a par ailleurs :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a).$$

D'où $\cos(a-b) = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$. Les autres formules se montrent par des raisonnements similaires. □

Remarque. On en déduit directement les trois formules suivantes (non-exigibles, mais qu'il faut savoir retrouver rapidement) :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2},$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2},$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}.$$

Exercice 5. Soit $t \in [-\pi, \pi]$. En factorisant $\cos(t) + \cos(2t)$, déterminer le signe de cette expression.
Solution : Les formules précédentes donnent (en cherchant des réels a et b tels que $a+b = 2t$ et $a-b = t$) :

$$\cos(t) + \cos(2t) = \cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}t + \frac{t}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Or $t \in [-\pi, \pi]$, donc $\frac{t}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$. L'expression étudiée est donc du signe de $\cos\left(\frac{3}{2}t\right)$.
Comme $t \in [-\pi, \pi]$, $\frac{3t}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. La valeur de $\cos\left(\frac{3}{2}t\right)$ est ainsi positive si $\frac{3t}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et négative si $\frac{3t}{2} \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Elle est donc positive si $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, et négative si $t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
L'expression $\cos(t) + \cos(2t)$ est donc positive sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ et négative sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Proposition 1.9 (Formules de duplication)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Démonstration. On applique les formules d'addition pour $a = b$, puis la formule $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$. □

Proposition 1.10 (Formules de linéarisation du carré)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

Démonstration. Cela découle directement des formules $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ et $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$. □

Remarque. Ces formules sont particulièrement utiles pour calculer des primitives de $\cos^2$ et $\sin^2$ (puisqu'on ne sait pas primitiver un produit).

Proposition 1.11 (Formules d'addition de tangente)

Soit a et b deux réels pour lesquels les termes suivants sont bien définis, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

Remarque. Les conditions de bonne définition sont les suivantes :
- a et b sont différents de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π (pour la bonne définition de $\tan(a)$ et $\tan(b)$),
- $a+b$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π (pour la première égalité),
- $a-b$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π (pour la seconde égalité).

Démonstration. On utilise les formules d'addition de sinus et cosinus :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(a)\cos(b)\left(\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}\right)}{\cos(a)\cos(b)\left(1-\frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}\right)} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Pour $\tan(a-b)$, il suffit de remplacer b par $-b$ dans le calcul précédent. □

2 Fonctions circulaires

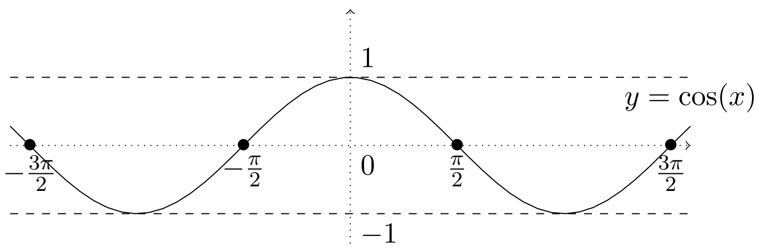
2.1 Cosinus, sinus

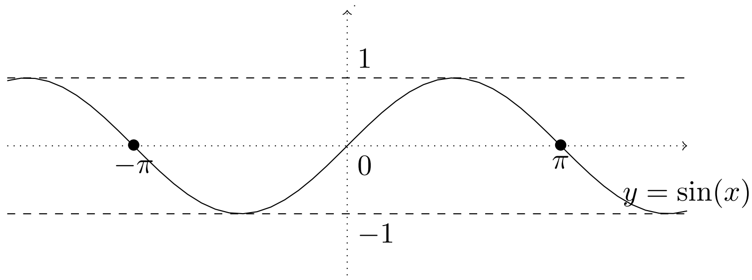
Proposition 2.1 (Symétries de sinus et cosinus)

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et c'est une fonction impaire.
La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et c'est une fonction paire.

Démonstration. Ces résultats découlent directement des relations établies plus tôt dans le chapitre. □

Remarque. On en déduit les représentations graphiques :





Proposition 2.2 (Inégalité classique du sinus)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$

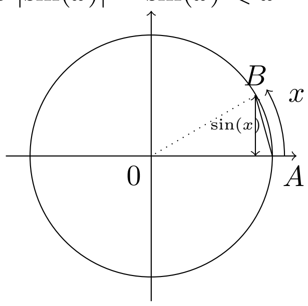
Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par disjonction de cas :

— Si $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, on constate de manière immédiate que $|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant |x|$.

— Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on raisonne sur le cercle trigonométrique. Notons d la taille du segment AB. On a alors

$$\sin(x) \leqslant d \leqslant x,$$

puisque l'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle et que l'arc du cercle trigonométrique qui relie A et B a pour longueur x. Donc $|\sin(x)| = \sin(x) \leqslant x = |x|$.

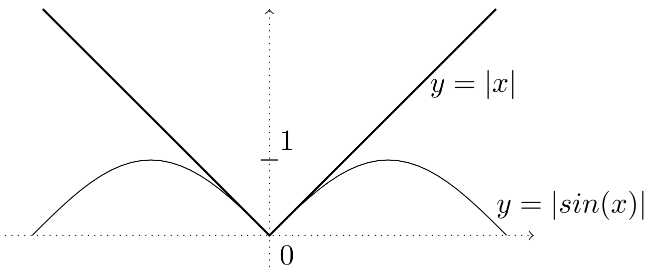


— Si $x \leqslant 0$, des considérations de parité permettent de se ramener au cas précédent, ce qui donne :

$$|\sin(x)| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| \leqslant |x|\,.$$

Donc l'inégalité est bien valable dans tous les cas. $\square$

Remarque. Graphiquement, cela donne :



Proposition 2.3 (Dérivée de sinus et cosinus)

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$,

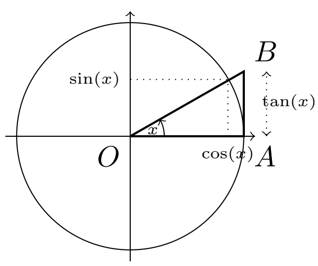
$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) - \sin(x_0)}{h} = \sin(x_0)\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right) + \cos(x_0)\left(\frac{\sin(h)}{h}\right).$$

On cherche à modifier cette expression de manière à pouvoir passer à la limite quand $h \to 0$. On remarque tout d'abord que grâce aux identités remarquables :

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)} = \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)} = \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{-\sin(h)}{\cos(h)+1}.$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\sin(h)}{\cos(h)+1} = \dfrac{0}{2} = 0$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ pour conclure.

On commence par un petit résultat intermédiaire : soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Sur la figure ci-dessous, le triangle OAB a pour aire $\dfrac{\tan(x) \times 1}{2} = \dfrac{\tan(x)}{2}$. La portion de cercle délimitée par l'angle x a pour aire $\pi\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$. Donc $x \leqslant \tan(x)$.



Soit $h \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (le cas négatif se déduit ensuite par parité), on a donc que $0 < \sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$. Donc par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{\sin(h)} \geqslant \dfrac{1}{h} \geqslant \dfrac{\cos(h)}{\sin(h)}$. En multipliant par $\sin(h) \geqslant 0$, on obtient $1 \geqslant \dfrac{1}{h} \geqslant \cos(h)$. Or $\lim\limits_{h\to 0} \cos(h) = 1$, donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$.

Cela permet de conclure, comme on le souhaitait : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)$.

Donc sin est dérivable en x_0 et $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$. On procède de même pour étudier la dérivabilité du cosinus. □

Exercice 6. Soit $t \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin(3t)\cos(2t)$. En déduire une primitive de $t \mapsto \sin(3t)\cos(2t)$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : Les formules d'addition donnent :

$$\sin(3t)\cos(2t) = \frac{\sin(3t+2t) + \sin(3t-2t)}{2} = \frac{1}{2}\sin(5t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

Une primitive est donc $t \mapsto -\frac{1}{10}\cos(5t) - \frac{1}{2}\cos(t)$.

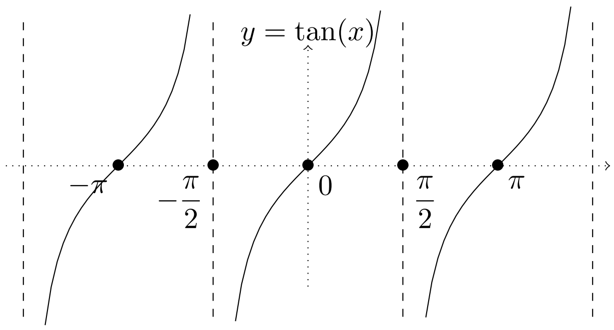
2.2 Tangente

Définition 2.4 (Tangente)

La fonction **tangente** est la fonction définie sur $I = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$ par : $\forall x \in I$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Remarque. L'écriture $I = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ fonctionne également.

Remarque. On sait déjà que la fonction tangente est périodique de période π et impaire, ce qui aide à construire sa représentation graphique :



Proposition 2.5 (Dérivée de tangente)

La fonction tangente est dérivable sur $I = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$, et $\forall x \in I$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Démonstration. La fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, et par quotient, $\forall x \in I$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)},$$

ce qui donne les deux formules annoncées. □