Ensemble des nombres complexes

Cours de É. Bouchet – PCSI

24 septembre 2025

Table des matières

1 Nombres complexes

1.1 Présentation

Définition 1.1 (Nombre complexe)

On appelle **nombre complexe** tout élément z pouvant s'écrire sous la forme $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i une solution de l'équation $i^2 = -1$.

Remarque. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni de deux opérations internes, l'addition et la multiplication, dont les règles de calculs sont identiques à celles de $\mathbb{R}$, en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$. Les formules usuelles sur les sommes (somme de termes d'une suite géométrique, télescopage, binôme de Newton, identités remarquables...) restent valides dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Simplifier le produit $(1 + 3i)(2 - 5i)$.

Remarque. Si $z = a + ib$ avec (a, b) un couple de réels différent de $(0, 0)$, alors $z \neq 0$ et on a :

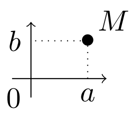
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-i^2b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Exercice 2. Simplifier le quotient $\frac{1}{3i-2}$.

1.2 Représentation graphique

Définition 1.2 (Affixe)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, aussi appelé **plan complexe**.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et M le point du plan de coordonnées (a, b). Le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé **l'affixe** du point M. C'est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Proposition 1.3 (Affixe d'un vecteur quelconque)

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Proposition 1.4 (Affixe du milieu d'un segment)

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes z_A et z_B. Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A+z_B}{2}$.

1.3 Écriture algébrique

Définition 1.5 (Partie réelle, partie imaginaire)

L'écriture du nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des réels est appelée **l'écriture algébrique** de z. Le réel a est appelé la **partie réelle** de z et b est sa **partie imaginaire**.
On note $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.

Remarque. Attention : contrairement à ce que son nom pourrait laisser penser, la partie imaginaire est un réel.

Proposition 1.6 (Unicité de l'écriture algébrique)

L'écriture algébrique d'un nombre complexe z est unique.

Proposition 1.7 (Écriture algébrique de la somme et du produit)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$ et $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$.
De plus, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$ et $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Re}(z_2)\operatorname{Im}(z_1)$.

Définition 1.8 (Nombre imaginaire pur)

Le complexe z est dit **imaginaire pur** si $\operatorname{Re}(z) = 0$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Exemple. $3i$ est un imaginaire pur, $2 + 3i$ n'en est pas un.

2 Conjugaison et module

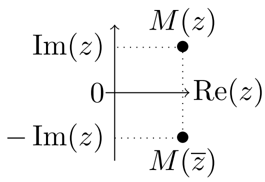
2.1 Conjugaison

Définition 2.1 (Conjugué)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Remarque. On a donc $\operatorname{Re}(\overline{z}) = \operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im}(z)$.

Remarque. Dans le plan complexe, l'image $M(\overline{z})$ du nombre complexe $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point $M(z)$:



Proposition 2.2 (Lien entre conjugué et partie réelle/imaginaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Remarque. En particulier, $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.

Proposition 2.3 (Opérations sur le conjugué)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$. Si de plus z_2 est non nul, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

2.2 Module

Définition 2.4 (Module)

Soit $z = a + ib$ où (a, b) est un couple de réels. Le **module** de z, noté $|z|$, est le réel

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Remarque. Comme $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$, ces deux expressions sont bien égales.

Proposition 2.5 (Propriétés du module)

Pour tout nombre complexe z, $|z| = |\overline{z}|$, $|z| \geqslant 0$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.

Proposition 2.6 (Relations entre $|\mathrm{Re}(z)|$, $|\mathrm{Im}(z)|$ et $|z|$)

Pour tout nombre complexe z,

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+,$$

$$|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = |z| \iff z \in i\mathbb{R}_+.$$

Proposition 2.7 (Module du produit et du quotient)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, et si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Exercice 3. Déterminer le module de $\frac{(1+i)(4-5i)}{i-5}$.

Proposition 2.8 (Inégalité triangulaire)

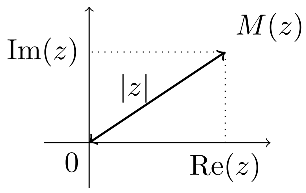
Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$.

Remarque. La condition $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+$ signifie que les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

2.3 Interprétation géométrique du module

Proposition 2.9 (Module et distance à l'origine)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Dans le plan complexe, $|z|$ représente la distance de l'origine 0 au point $M(z)$.



Proposition 2.10 (Module et distance entre deux points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et A, B leurs images dans le plan complexe. La valeur $|a - b|$ correspond à la distance entre les points A et B.

Remarque. On déduit directement de ces propriétés que si A est un point d'affixe a et r est un réel strictement positif,

— Le cercle de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a| = r\}$.

— Le disque fermé de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a| \leqslant r\}$.

— Le disque ouvert de centre A et de rayon r correspond à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a| < r\}$.

Exercice 4. Montrer que le point d'affixe $2 + i$ se trouve sur le cercle de centre d'affixe $2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

3 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

3.1 Nombres complexes de module 1

Définition 3.1 (Cercle trigonométrique)

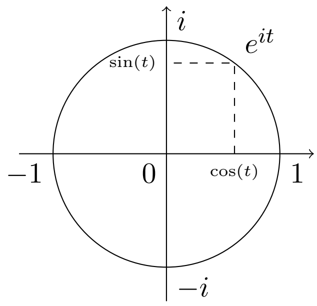
On pose $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ s'identifie au cercle trigonométrique, de centre 0 et de rayon 1.

Définition 3.2 (e^{it}, $t \in \mathbb{R}$)

Soit $t \in \mathbb{R}$, on note e^{it} le nombre complexe $\cos(t) + i\sin(t)$.

Remarque. Attention, l'exponentielle est ici une simple notation. Notamment, il ne FAUT PAS appliquer ln à des exponentielles complexes pour les simplifier.

Remarque. Comme tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées du type $(\cos(t), \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathbb{U} = \{e^{it} | t \in \mathbb{R}\}$.



Proposition 3.3 (Produit de termes en e^{it})

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$.

Proposition 3.4 (Quotient de termes en e^{it})

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{ia}} = e^{-ia} = \frac{1}{e^{ia}}$.

Remarque. On déduit immédiatement des deux derniers résultats que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{e^{ia}}{e^{ib}} = e^{i(a-b)}$.

Proposition 3.5 (Module de termes en e^{it})

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{it}\right| = 1$.

3.2 Formules d'Euler et technique de l'angle moitié

Proposition 3.6 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Remarque. Ces formules permettent d'utiliser des technique de l'angle moitié pour factoriser des expressions : soit $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$e^{it} + e^{i\theta} = e^{i\frac{t+\theta}{2}} \left(e^{i\frac{t-\theta}{2}} + e^{-i\frac{t-\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t-\theta}{2}\right) e^{i\frac{t+\theta}{2}}.$$
$$e^{it} - e^{i\theta} = e^{i\frac{t+\theta}{2}} \left(e^{i\frac{t-\theta}{2}} - e^{-i\frac{t-\theta}{2}}\right) = 2i\sin\left(\tfrac{t-\theta}{2}\right) e^{i\frac{t+\theta}{2}}.$$

Le cas particulier $t = 0$ permet entre autres de traiter les formes $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Ces relations permettent entre autres de retrouver des formules trigonométriques, en prenant les parties réelles ou imaginaires.

Exercice 5. Soit $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant les techniques d'angle moitié à $e^{it} + e^{i\theta}$, factoriser $\cos(t) + \cos(\theta)$.

Exercice 6. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. **Linéariser** $\cos^3(\theta)$ (c'est-à-dire modifier cette expression pour faire disparaître le produit et se ramener à une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques).

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{n} \cos(3k)$.

3.3 Formule de Moivre

Proposition 3.7 (Formule de Moivre)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exercice 8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

4 Forme trigonométrique

4.1 Forme trigonométrique et arguments

Définition 4.1 (Argument)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Tout réel θ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}$ est appelé un **argument** de z.

Remarque. Si θ est un argument de z, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est encore un argument de z.
De plus, si θ et θ' sont deux arguments de z, alors $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

Remarque. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On suppose que $a + ib = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Alors :

$$a = r(\cos(\theta)) \text{ et } b = r(\sin(\theta)), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

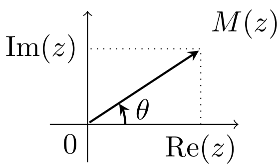
Exercice 9. Trouver le module et un argument de $z = 1 + i$.

Définition 4.2 (Forme trigonométrique)

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la **forme trigonométrique** $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et θ réel. On a alors $r = |z|$ et θ est un argument de z.

Remarque. Attention, contrairement à la forme algébrique, cette écriture n'est pas unique (puisqu'on peut trouver plusieurs arguments différents).

Remarque. Soit z un nombre complexe d'argument θ et M son image dans le plan complexe. Alors θ correspond à une valeur de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians.



4.2 Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$

Proposition 4.3 (Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $a\cos(t) + b\sin(t) = r\cos(t - \varphi)$.

Exercice 10. Soit $t \in \mathbb{R}$, déterminer une expression de $\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t)$ sous la forme $r\cos(t - \varphi)$.