

**Exercice 1 (★).** Déterminer le comportement asymptotique (convergence/divergence, limite éventuelle) des suites définies pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$                              | 2. $b_n = ((-1)^n + n^3) e^{-n}$   | 3. $c_n = ((-1)^n + e^{-n}) n^3$  |
| 4. $d_n = (\cos(n) + 3) \ln(n)$                                  | 5. $e_n = \frac{3n+1}{2n^2-1}$   | 6. $f_n = \frac{2n^2+3n+1}{5n^2+4n-2}$  |
| 7. $g_n = \frac{(\ln(n))^2 - 2}{\ln(n) + n}$                     | 8. $h_n = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}n) - 3n}{n+3}$                             | 9. $i_n = \frac{(-1)^n + 2n}{n^2}$  |
| 10. $j_n = n^2 \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$ | 11. $k_n = n^2 \left(\frac{11}{10} + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$ | 12. $\ell_n = n \left(2 + \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right) - \sqrt{n}$ |

**Exercice 2 (★).** Démontrer que la suite  $u$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left((-1)^n - \frac{3}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$  est bornée. On explicitera un majorant et un minorant.

**Exercice 3 (★★).** Démontrer que la suite  $v$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \times \frac{n^2+1}{n^2+2} + 3e^{-n} - 10 \sin(n)$  est bornée.

**Exercice 4 (★).** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant  $v_0 \in [0, 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = v_n(1 - v_n)$ .

1. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \in [0, 1]$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Étudier la convergence de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 5 (★).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3 + k^3}$ . Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, et donner sa limite.

**Exercice 6 (★).** Démontrer que la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(\frac{\pi k^2}{7}) + 2}{2^k}$  est convergente.

**Exercice 7 (★★).** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n$  entier non nul par :  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.
2. Montrer que pour tout  $n$  non nul,  $u_{2n} - \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .
3. En déduire la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 8 (★★).** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que les trois suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{5n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent. Montrer que la suite  $u$  converge.

**Exercice 9 (★★).** Montrer que la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$  converge.

*Indication : on pourra commencer par étudier les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ .*

**Exercice 10 (★★★).** On définit les deux suites réelles  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $b_0 > a_0 > 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Montrer que ces deux suites sont bien définies et qu'elles convergent vers un même réel  $\ell$ .

**Exercice 11 (★).** Soit  $u$  la suite réelle définie par  $u_0 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 2$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 12 (★).** Soit  $w$  la suite définie par  $w_0 = \frac{1}{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{n+1} = -3w_n + 1$ .

1. Déterminer le terme général de  $w$ .
2. Déterminer le comportement de  $w_n$  (convergence, divergence, limite) lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 13 (★★).** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u$  la suite réelle définie par  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n + 3$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 14 (★★).** Dans chacune des situations suivantes, déterminer la limite de la suite réelle étudiée.

1.  $u$  est une suite telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n + \frac{1}{3}$ .
2.  $v$  est une suite positive telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leq \frac{3}{4}v_n$ .
3.  $w$  est une suite telle que  $\forall n \geq 3, |w_{n+1} - \sqrt{5}| \leq (e-2)|w_n - \sqrt{5}|$ .

**Exercice 15 (★).** Pour chacune des suites réelles suivantes, exprimer le terme général de la suite en fonction de  $n$  :

1. La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n, w_0 = 0$  et  $w_1 = 1$ .
2. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$ .
3. La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = -v_{n+1} - v_n, v_0 = 1$  et  $v_1 = -1$ .

**Exercice 16 (★★).** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}, u_0 = 1, u_1 = 2$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout entier  $n$  par  $v_n = \ln(u_n)$  existe.
2. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente linéaire double.
3. En déduire l'expression de  $v_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 17 (★).** Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6u_n+5}{u_n+2}$ .

1. Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$ . En déduire que la suite est bien définie, et tracer la représentation des réels  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .
2. Étudier la monotonie et les bornes éventuelles de la suite  $u$ .
3. Montrer que la suite  $u$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 18 (★★).** Soit  $u$  vérifiant  $u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$ . Déterminer le comportement de  $u_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 19 (★★★).** Déterminer le comportement en  $+\infty$  de la suite  $u$  définie par le premier terme  $u_0 \geq 0$  et la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ .

**Exercice 20 (Type DS).** On définit la suite de terme général  $a_n$  par :  $\forall n \geq 1, a_n = \frac{\sqrt{n} \binom{2n}{n}}{4^n}$ .

1. Calculer  $a_1$  puis, pour tout entier  $n \geq 1$ , montrer que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$ .
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1 : a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$ .

*Indication* : on pourra commencer par simplifier  $\frac{n+1}{2n+3} - \frac{2n+1}{4n+4}$  pour en étudier le signe.

3. Déterminer le sens de variation de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , puis montrer qu'elle converge vers un réel  $\ell$  tel que :  $\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .