

Applications des nombres complexes

Cours de É. Bouchet – PCSI

25 septembre 2025

Table des matières

1	Équations algébriques	2
1.1	Racines d'un nombre complexe	2
1.2	Factorisations et résolution d'équations	2
1.3	Racines n-ièmes de l'unité	2
1.4	Cas général	3
2	Exponentielle complexe	3
2.1	Définitions et premières propriétés	3
2.2	Opérations sur les exponentielles complexes	3
2.3	Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	4
3	Interprétation géométrique des nombres complexes	4
3.1	Étude de $\frac{c-a}{b-a}$	4
3.2	Applications $z \mapsto az + b$	5

1 Équations algébriques

1.1 Racines d'un nombre complexe

Définition 1.1 (Racines d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. L'équation $t^2 = z$ d'inconnue $t \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions opposées, appelées **racines de z** .

Remarque. La notation $\sqrt{z}$ est absolument réservée aux nombres réels positifs, elle ne doit JAMAIS être utilisée dans le cas plus général d'un nombre complexe (notamment parce qu'on ne saurait pas laquelle des deux racines choisir).

Exercice 1. Déterminer les racines complexes de -4 et de i .

Remarque. La résolution se fait très bien sous forme exponentielle. C'est plus calculatoire avec la forme algébrique, mais faire intervenir le module permet de simplifier les calculs.

Exercice 2. En effectuant les calculs sous forme algébrique, déterminer les racines complexes de $3 + 4i$.

1.2 Factorisations et résolution d'équations

Proposition 1.2 (Racines complexes des polynômes de degré 2)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $\frac{-b + \delta}{2a}$ et $\frac{-b - \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$.

Exercice 3. Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^2 - z - i - \frac{1}{2} = 0$.

Proposition 1.3 (Somme et produit des racines d'un polynôme de degré 2)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$. Alors :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque. Dans le cas d'une racine double, ce résultat reste valable en utilisant la même valeur pour z_1 et z_2 . Pour le cas des équations de degré supérieur, on utilise la propriété suivante :

Proposition 1.4 (Factorisation par une racine complexe)

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes admettant $a \in \mathbb{C}$ comme racine. Alors on peut factoriser $P(z)$ par $z - a$.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Factoriser $z^2 - z - i - \frac{1}{2}$.

1.3 Racines n-ièmes de l'unité

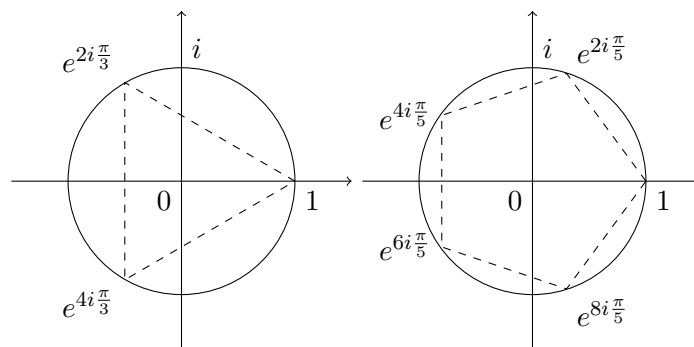
Définition 1.5 (Racine n -ième de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n -ième de l'unité** toute solution complexe de l'équation $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Proposition 1.6 (Valeurs des racines n -ièmes de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement n racines n -ièmes de l'unité distinctes : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

Remarque. Sur le cercle trigonométrique, les points de $\mathcal{U}_n$ correspondent aux n sommets d'un polygone régulier.



Proposition 1.7 (Somme des racines n -ièmes de l'unité)

Soit un entier $n \geq 2$. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$.

Remarque. Cela signifie que $\sum_{z \in \mathcal{U}_n} z = 0$.

1.4 Cas général

Définition 1.8 (Racine n -ième, cas général)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, on appelle **racine n -ième** de a toute solution de l'équation $z^n = a$, pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.9 (Valeurs des racines n -ièmes d'un nombre complexe)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = |a|e^{i\theta}$.

Les racines n -ièmes de a sont les éléments de l'ensemble $\left\{ \sqrt[n]{|a|} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

Exercice 5. Déterminer les solutions complexes de l'équation $z^3 = 8e^{i\pi}$.

2 Exponentielle complexe

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 (Exponentielle complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit **l'exponentielle complexe** de z comme le nombre complexe $e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$. Elle est notée $\exp(z)$ ou e^z .

Exemple. $e^{1+i} = e^1 e^i = e e^i = e \cos(1) + i e \sin(1)$.

Proposition 2.2 (Module et arguments de l'exponentielle complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ et un argument est $\operatorname{Im}(z)$.

2.2 Opérations sur les exponentielles complexes

Proposition 2.3 (Exponentielle d'une somme de nombres complexes)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Proposition 2.4 (Cas d'égalité des exponentielles de nombres complexes)

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z_1) = \exp(z_2) \iff z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Déterminer les solutions complexes à l'équation $\exp(z) = 1 + i$.

2.3 Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Définition 2.5 (Dérivation d'une fonction à valeurs complexes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. On appelle alors nombre dérivé en a la valeur :

$$f'(a) = (\operatorname{Re}(f))'(a) + i(\operatorname{Im}(f))'(a).$$

Remarque. Dériver une fonction à valeurs complexes revient donc à dériver ses parties réelle et imaginaire, ce qui permet de conserver les formules habituelles de dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée.

Exercice 7. Étudier la dérivée de la fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\cos(x) + i \sin(x)$.

Exercice 8. Étudier la dérivée de la fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\frac{1}{3x + 2i}$.

Proposition 2.6 (Dérivabilité et lien avec les fonctions constantes)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I .

Remarque. Le reste des résultats de monotonie ne se généralise par contre pas, puisque les relations de comparaison et les notions de positivité-négativité ne fonctionnent pas dans $\mathbb{C}$.

Proposition 2.7 (Dérivabilité de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$. Alors $f : x \mapsto \exp(\varphi(x))$ est dérivable sur I , et :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \varphi'(x) \exp(\varphi(x)).$$

3 Interprétation géométrique des nombres complexes

3.1 Étude de $\frac{c-a}{b-a}$

Proposition 3.1 (Angles et distances)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq b$ et $a \neq c$. On note A, B, C leurs images dans le plan complexe. Alors

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB},$$

où AC et AB représentent les distances entre les points. De plus, tout argument de $\frac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en radians.

Proposition 3.2 (Points alignés, droites orthogonales)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq b$ et $a \neq c$. On note A, B, C leurs images dans le plan complexe. Alors :

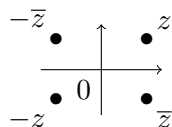
$$A, B, C \text{ sont alignés} \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}, \quad (AB) \text{ et } (AC) \text{ sont orthogonales} \iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z = x + iy$. Pour quelles valeurs de z le triangle de sommets A, B, C , d'affixes respectives $a = 2 - 3i, b = 1 + 2i, c = z$ est-il rectangle en A ?

3.2 Applications $z \mapsto az + b$

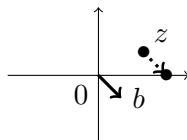
On a déjà vu que si $z \in \mathbb{C}$,

- $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.
- $-z$ est le symétrique de z par rapport à 0.
- $-\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des ordonnées.

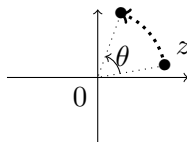


D'autres cas particuliers présentent un intérêt notable et doivent être reconnues :

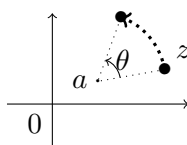
- Les **translations de vecteur** $b \in \mathbb{C}$, qui s'écrivent sous la forme $z \mapsto z + b$.



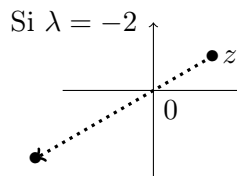
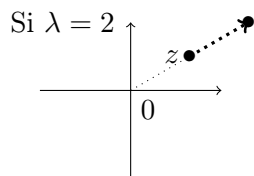
- Les **rotations de centre 0 et d'angle** $\theta \in \mathbb{R}$, qui s'écrivent sous la forme $z \mapsto e^{i\theta}z$.



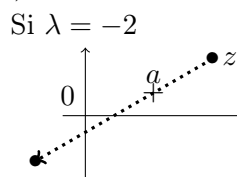
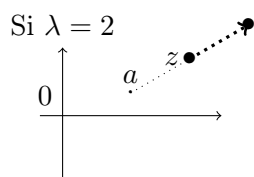
- Les **rotations de centre** $a \in \mathbb{C}$ **et d'angle** $\theta \in \mathbb{R}$, qui vérifient $z' - a = e^{i\theta}(z - a)$ où z' est l'image de z . L'application s'écrit donc sous la forme $z \mapsto a + e^{i\theta}(z - a)$.



- Les **homothéties de centre 0 et de rapport** $\lambda \in \mathbb{R}^*$, qui s'écrivent sous la forme $z \mapsto \lambda z$.



- Les **homothéties de centre** $a \in \mathbb{C}$ **et de rapport** $\lambda \in \mathbb{R}^*$, qui vérifient $z' - a = \lambda(z - a)$ où z' est l'image de z . L'application s'écrit donc sous la forme $z \mapsto a + \lambda(z - a)$.



Exercice 10. À quoi correspond l'application $f : z \mapsto iz + 3 - i$?