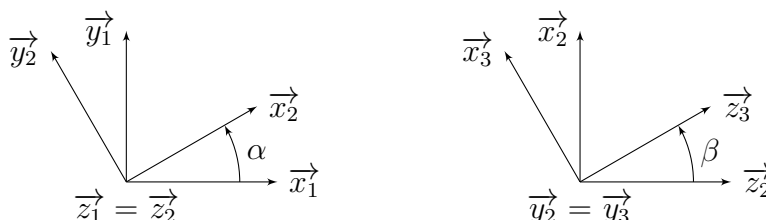


Applications de calcul vectoriel

— *Éléments de correction du TD* —

1 Centrifugeuse de laboratoire

Avec la description du sujet, il vient les figures géométrales :



Question 1. Par relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{O_1A_3} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3A_3} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{O_1A_3} = h\vec{z}_1 + R\vec{x}_2 + \ell\vec{x}_3}$$

Question 2. Par définition, on a :

$$\|\overrightarrow{O_1A_3}\|^2 = \overrightarrow{O_1A_3} \cdot \overrightarrow{O_1A_3} = h^2 + R^2 + \ell^2 + 2hR\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 + 2h\ell\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_3 + 2R\ell\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3$$

avec

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 = \vec{z}_2 \cdot \vec{x}_2 = 0, \quad \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_3 = \vec{z}_2 \cdot \vec{x}_3 = -\sin(\beta), \quad \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 = \cos(\beta)$$

il vient :

$$\boxed{\|\overrightarrow{O_1A_3}\| = \sqrt{h^2 + R^2 + \ell^2 + 2\ell(R\cos(\beta) - h\sin(\beta))}}$$

Question 3. Avec la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_1 &= -\sin(\alpha)\vec{z}_1 \\ \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 &= \cos(\alpha)\vec{z}_1 \end{aligned}$$

Dans la base $\mathcal{B}_2$, on a :

$$\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_1 = \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_2 = -\vec{y}_2$$

Avec la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_1 &= \vec{x}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\cos(\beta)\vec{y}_2 \\ \vec{z}_3 \wedge \vec{z}_1 &= \vec{z}_3 \wedge \vec{z}_2 = -\sin(\beta)\vec{y}_2 \end{aligned}$$

Sachant que $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_3$ ne sont pas deux vecteurs dont les bases sont reliées par une figure géométrale, il y a deux possibilités pour faire le calcul :

1. exprimer $\vec{x}_3$ dans $\mathcal{B}_2$

$$\vec{x}_3 = \cos(\beta)\vec{x}_2 - \sin(\beta)\vec{z}_2$$

et utiliser la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Dans ce cas, il vient :

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 = \vec{x}_1 \wedge (\cos(\beta)\vec{x}_2 - \sin(\beta)\vec{z}_2)$$

Par linéarité du produit vectoriel et avec

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = \sin(\alpha)\vec{z}_1, \quad \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_2 = \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\vec{y}_1$$

il vient :

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 = \sin(\beta)\vec{y}_1 + \cos(\beta)\sin(\alpha)\vec{z}_1$$

2. exprimer $\vec{x}_1$ dans $\mathcal{B}_2$

$$\vec{x}_1 = \cos(\alpha)\vec{x}_2 - \sin(\alpha)\vec{y}_2$$

et utiliser la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$. Dans ce cas, il vient :

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 = (\cos(\alpha)\vec{x}_2 - \sin(\alpha)\vec{y}_2) \wedge \vec{x}_3$$

Par linéarité du produit vectoriel et avec

$$\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_3 = \sin(\beta)\vec{y}_2, \quad \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_3 = \vec{y}_3 \wedge \vec{x}_3 = -\vec{z}_3$$

il vient :

$$\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_3 = \cos(\alpha)\sin(\beta)\vec{y}_2 + \sin(\alpha)\vec{z}_3$$

Ce sont deux expressions du même vecteur. En effet, partant de :

$$\vec{y}_2 = \cos(\alpha)\vec{y}_1$$

$$\vec{z}_3 = \cos(\beta)\vec{z}_2 + \sin(\beta)\vec{x}_2 = \cos(\beta)\vec{z}_1 + \sin(\beta)(\cos(\alpha)\vec{x}_1 + \sin(\alpha)\vec{y}_1)$$

on retrouve bien la première expression trouvée dans la base $\mathcal{B}_1$.

On peut procéder de la même façon pour $\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_3$; soit :

$$\vec{y}_1 \wedge \vec{z}_3 = \vec{y}_1 \wedge (\cos(\beta)\vec{z}_2 + \sin(\beta)\vec{x}_2)$$

$$= \cos(\beta)\vec{x}_1 - \sin(\beta)\sin(\alpha)\vec{z}_1$$

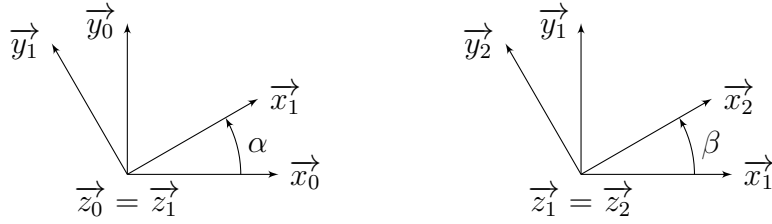
ou

$$= (\cos(\alpha)\vec{y}_2 + \sin(\alpha)\vec{x}_2) \wedge \vec{z}_3$$

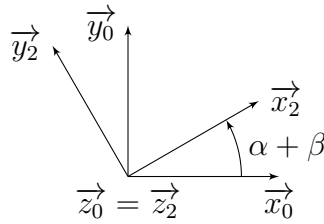
$$= \cos(\alpha)\vec{x}_3 - \sin(\alpha)\cos(\beta)\vec{y}_2$$

2 Robot Ericc3

Question 4. Avec la description du sujet, il vient les figures géométrales :



qui sont toutes deux coplanaires et nous autorisent donc à réaliser une troisième figure géométrale permettant de relier directement les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_2$:



Question 5. Par relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \ell_1 \vec{x}_1 + \ell_2 \vec{x}_2$$

d'où

$$\|\overrightarrow{OB}\|^2 = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = \ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1\ell_2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$$

avec $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos(\beta)$, il vient :

$$\boxed{\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1\ell_2 \cos(\beta)}}$$

Question 6. La hauteur (direction $\vec{y}_0$) du point B par rapport au point O est définie comme la coordonnée :

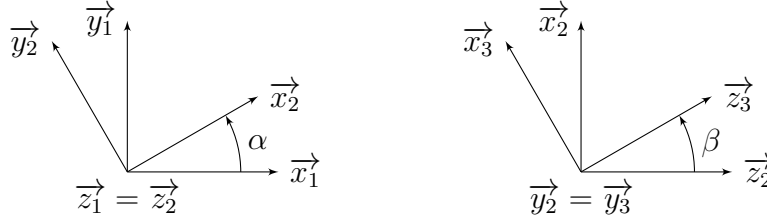
$$h = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{y}_0 = (\ell_1 \vec{x}_1 + \ell_2 \vec{x}_2) \cdot \vec{y}_0$$

d'où

$$\boxed{h = \ell_1 \sin(\alpha) + \ell_2 \sin(\alpha + \beta)}$$

3 « Robot de peinture »

Question 7. Avec la description du sujet, on constate que les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ sont confondues. Il vient les figures géométrales :



Question 8. Par relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{y_1} + H \overrightarrow{z_1} + L \overrightarrow{z_3}$$

On remarque que pour exprimer ce vecteur dans la base $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1$, il est nécessaire d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{z_3}$ dans la base $\mathcal{B}_2$ puis dans la base $\mathcal{B}_1$, ce qui fait successivement apparaître les angles α et β :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{z_3} &= \cos(\beta) \overrightarrow{z_2} + \sin(\beta) \overrightarrow{x_2} \\ &= \cos(\beta) \overrightarrow{z_1} + \sin(\beta) (\cos(\alpha) \overrightarrow{x_1} + \sin(\alpha) \overrightarrow{y_1}) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = L \sin(\beta) \cos(\alpha) \overrightarrow{x_1} + (\lambda + L \sin(\beta) \sin(\alpha)) \overrightarrow{y_1} + (H + L \cos(\beta)) \overrightarrow{z_1}}$$

Soit avec les composantes dans $\mathcal{B}_0$:

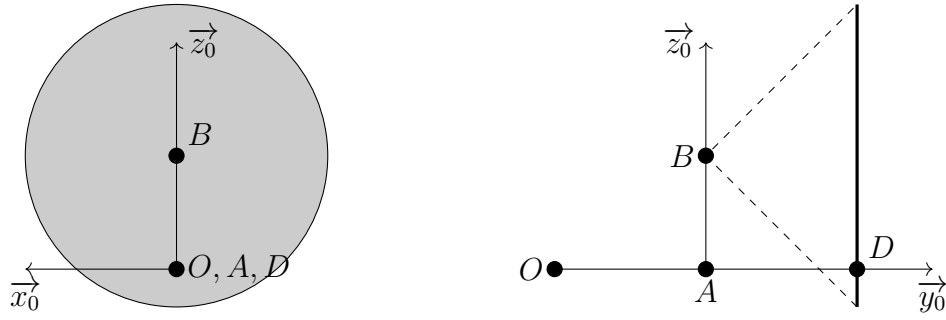
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{x_0} &= L \sin(\beta) \cos(\alpha) \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{y_0} &= \lambda + L \sin(\beta) \sin(\alpha) \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{z_0} &= H + L \cos(\beta) \end{aligned}$$

Question 9. Par composition des mobilités, on constate que le point P peut décrire librement la surface d'une sphère de centre B et de rayon L dans **1**. En ajoutant la mobilité en translation de **1** par rapport à **0**, l'ensemble des points accessibles par le point P est contenu dans un cylindre d'axe $(B, \overrightarrow{y_0})$ et de rayon L .

Ainsi, en limitant ses déplacements au plan de normale $\overrightarrow{y_0}$ passant par le point D , tel que

$$\overrightarrow{OD} = b \overrightarrow{y_0}$$

il vient que l'ensemble des positions accessibles est limité par le cercle de centre C tel que $\overrightarrow{DC} = H \overrightarrow{z_0}$ et de rayon L (défini comme l'intersection du plan et du cylindre). Il vient alors les figures :



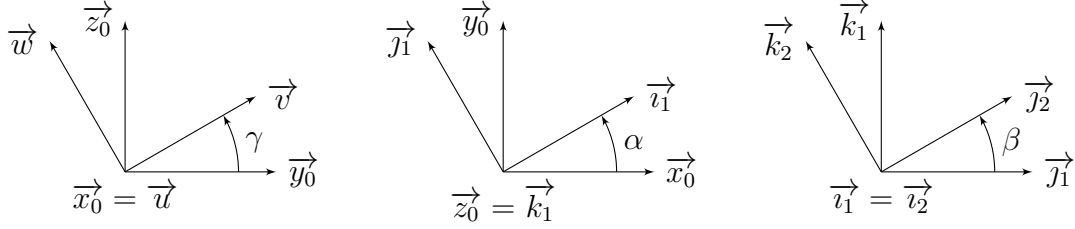
Enfin, on note que ces mouvements sont caractérisés par la contrainte :

$$\overrightarrow{DP} \cdot \vec{y}_0 = 0 \iff b = \lambda + L \sin(\beta) \sin(\alpha)$$

qui signifie que les trois paramètres λ , α et β ne sont plus indépendants et donc qu'il ne reste que deux mobilités (dans le plan).

4 « Fixie »

Question 10. Avec la description du sujet, il vient les figures géométrales :



Question 11. Par relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = d\vec{u} + e\vec{v} + f\vec{u}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{AF} = (d + f)\vec{u} + e\vec{v}}$$

Question 12. Sachant que, par anti-symétrie du produit vectoriel, on a

$$\overrightarrow{V_F} = \overrightarrow{FA} \wedge \omega_P \vec{x}_0 = \omega_P \vec{x}_0 \wedge \overrightarrow{AF}$$

et avec $\vec{x}_0 = \vec{u}$:

$$\vec{x}_0 \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{x}_0 \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{V_F} = e\omega_P \vec{w}}$$

Question 13. Partant de

$$\overrightarrow{V_H} = \overrightarrow{HO_2} \wedge (\omega_F \vec{z}_0 + \omega_r \vec{i}_1)$$

avec $\overrightarrow{HO_2} = -r\vec{j}_2$, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{j}_2 \wedge \vec{z}_0 &= \vec{j}_2 \wedge \vec{k}_1 = \cos(\beta) \vec{i}_1 \\ \vec{j}_2 \wedge \vec{i}_1 &= \vec{j}_2 \wedge \vec{i}_2 = -\vec{k}_2 \end{aligned}$$

il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{V_H} = r (\omega_r \vec{k}_2 - \omega_F \cos(\beta) \vec{i}_1)}$$