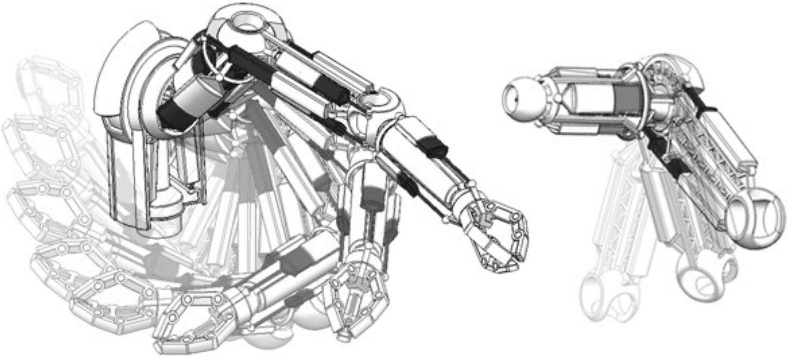
Modélisation et paramétrage des mécanismes

N. Mesnier
Lycée international Jean Perrin, Lyon

2025–2026

Définition (Cinématique)

Le mot cinématique dérive du grec *kinêma, kinêmatos* qui signifie mouvement et définit la partie de la mécanique qui étudie les mouvements indépendamment des causes qui les provoquent.



Objectifs

- Prédire les mouvements des solides des ensembles mécaniques connaissant ceux générés par les actionneurs ;
- caractériser les liens entre les mouvements d'entrée et de sortie des transmetteurs :
    - rapport de réduction des réducteurs (trains épicycloïdaux ou autres) ;
    - mécanismes de transformation de mouvement (bielle manivelle, croix de malte, pompe à pistons axiaux et radiaux, etc.).

Plan du cours

1 2 3

Introduction

Espace & temps

Cadre de travail : mécanique classique (non relativiste)

simultanéité temporelle absolue

$\Rightarrow$ *notions d'espace et de temps découplées*

Espace de temps

espace	affine euclidien 1D de points (instants)
repère	= chronologie ={instant initial + base de temps orientée vers le futur}
mesure	avec une horloge, unité seconde [s]
coordonnée	= date t
durée	La **durée** entre deux instants successifs I_1 et I_2, de coordonnées de temps respectives t_1 et t_2, est définie par :

$$\text{durée}\,(I_1, I_2) = |t_2 - t_1|$$

Espace & temps

Espace « physique »

- **espace** affine euclidien 3D de points (points)
- **repère** $=$ {origine $+$ base (3 vecteurs)}
- **mesure** avec un mètre, unité mètre [m]
- **distance** entre deux points A et B $=$ norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\text{distance}\,(A, B) = ||\overrightarrow{AB}||$$

À chaque **observateur** on associe :

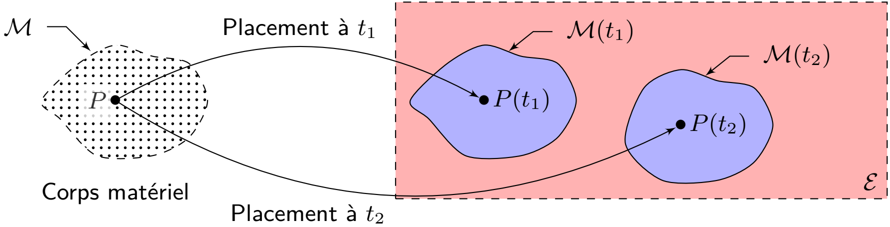
- un espace affine euclidien à trois dimensions $\mathcal{E}$
  (espace de points orienté et muni d'une mesure de distance)
- un espace de temps absolu paramétré sur l'axe des réels.

Mouvement

Définition (Mouvement)

On appelle mouvement toute évolution du placement d'un corps matériel dans un espace d'observation au cours du temps.

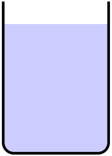
On appelle **placement** l'identification (bijection) effectuée par un observateur qui, à un instant donné t, associe à chaque point matériel P d'un corps matériel $\mathcal{M}$ un point $P(t)$ dans son espace d'observation $\mathcal{E}$.



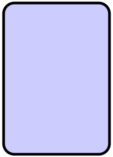
Corps matériel

Un **corps matériel**, qu'il soit fluide (liquide ou gaz) ou solide, est défini par l'ensemble des particules ou points matériels qui le constituent.

solide



fluide



gaz

En tant qu'ensemble de particules, un corps matériel a la même définition (constitution) pour tous les observateurs et existe donc indépendamment de la région de l'espace qu'il occupe à un instant donné de son évolution.

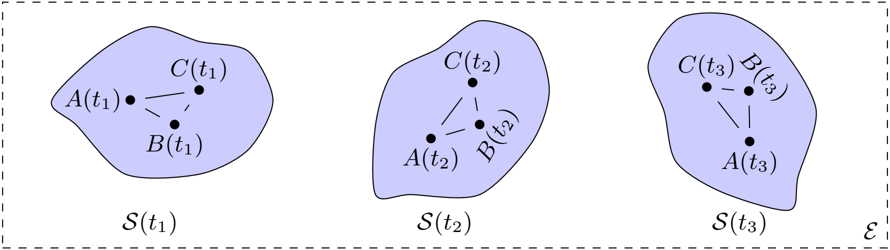
Solide indéformable

Définition (Solide indéformable)

Un solide $\mathcal{S}$ est dit rigide ou indéformable si et seulement si au cours de son évolution les distances entre tous les points qui le constituent sont invariables ; ce qui se traduit par :

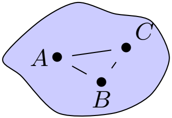
$$\forall A, B \in \mathcal{S}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\| \overrightarrow{AB}(t) \right\| = \text{cste}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ un paramètre d'évolution (le temps).

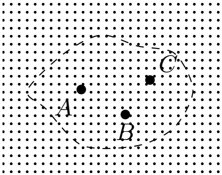


Association d'un repère à un solide indéformable

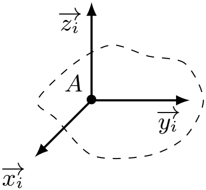
Le caractère rigide ou indéformable d'un solide permet de le modéliser par un espace affine euclidien tridimensionnel, rigide par définition. Or un espace euclidien peut toujours être rapporté à un repère spatial. On associera donc à chaque solide (indéformable) $\mathcal{S}_i$ d'un mécanisme, un **repère spatial** constitué d'un point de l'espace associé au solide $A \in \mathcal{S}_i$ et d'une base $\mathcal{B}_i = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$ que l'on prendra toujours orthonormée directe. On le note $\mathcal{R}_i = (A, \overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$.



(a) Solide indéformable



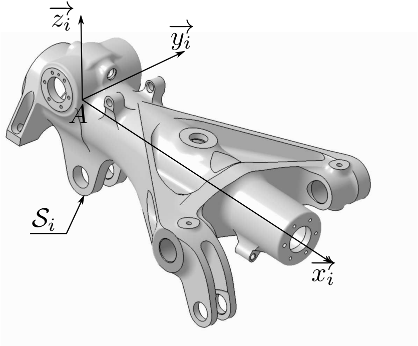
(b) Modèle de solide indéformable



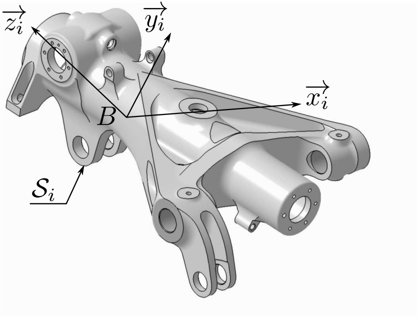
(c) Choix d'un repère

Association d'un repère à un solide indéformable

S'il est toujours possible de passer d'un repère à un autre, en pratique il est des choix qui sont beaucoup plus judicieux que d'autres.



(a) Choix judicieux



(b) Choix quelconque

Notion de référentiel

Un mouvement est une notion relative qui met nécessairement en jeu deux entités indissociables :

- un objet observé, dans notre cas un **solide indéformable** ;
- un **référentiel** d'étude du mouvement (observateur + horloge)

$$\text{Référentiel} = \left(\underbrace{\text{Point origine}, \text{Base spatiale}}_{\text{Repère}} \; ; \; \underbrace{\text{Instant initial}, \text{Base de temps}}_{\text{Chronologie}} \right)$$

Notion de référentiel

Nous avons vu que :

- caractère indéformable des solides $\Rightarrow$ conservation des angles et distances

  modèle de solide indéformable = espace euclidien

- cadre de la physique newtonienne :

  temps indépendant de l'espace et des objets physiques

donc

le repère associé à un solide peut servir à définir un référentiel

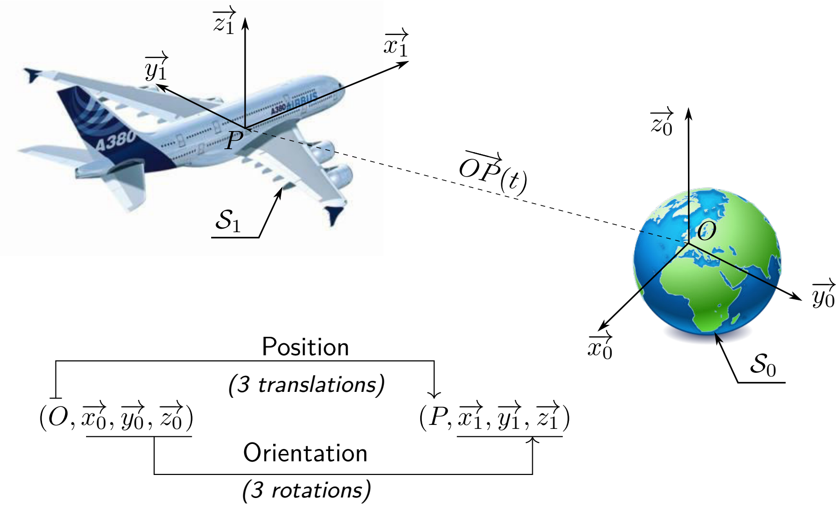
et on fera souvent l'abus de langage :

Repère $\approx$ Référentiel

1 2 3

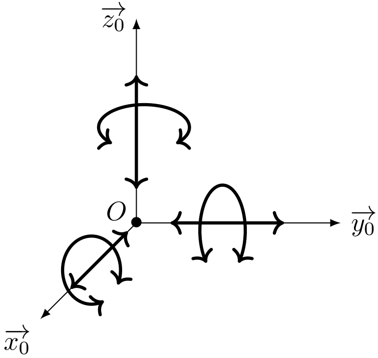
Placement d'un solide dans un référentiel

Placement d'un solide dans un référentiel



Notion de degré de liberté

Chaque possibilité de mouvement est appelée **degré de liberté**.



- 3 translations
- 3 rotations

6 c'est le nombre de paramètres scalaires indépendants nécessaires (et suffisants) pour paramétrer le placement d'un solide dans un repère.

Position d'un point d'un solide dans un référentiel

Définition (Vecteur position)

La position instantanée d'un point $M(t)$ appartenant à un solide $\mathcal{S}$ en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}(t)$.

On utilisera pour représenter $\overrightarrow{OM}(t)$ ($=$ écrire ses composantes)

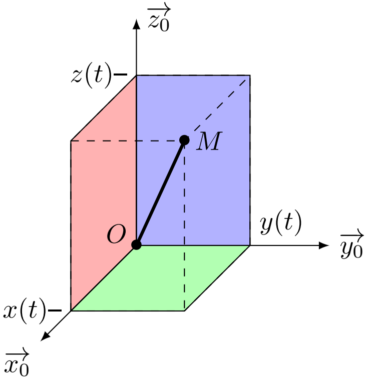
- un système de coordonnées cartésiennes ;
- un système de coordonnées cylindriques (ou polaires) ;
- un système de coordonnées sphériques.

La position d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

$$x(t) \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z(t) \in \mathbb{R}$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{x_0} + y(t)\overrightarrow{y_0} + z(t)\overrightarrow{z_0}$$



Coordonnées cylindriques (ou polaires)

La position d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

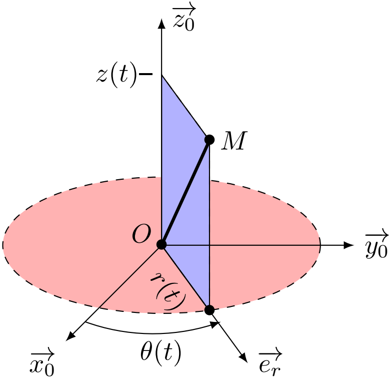
$$r(t) \in \mathbb{R}^+, \quad \theta(t) \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad z(t) \in \mathbb{R}$$

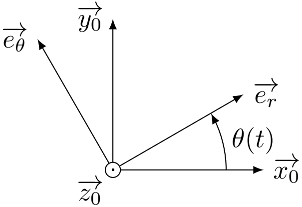
de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{e_r} + z(t)\overrightarrow{z_0}, \qquad \overrightarrow{e_r} \overset{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{e_r}(\theta(t))$$

Lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \\ z(t) = z(t) \end{cases}$$





Coordonnées sphériques

La position d'un point $M(t) \in \mathcal{S}$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$, d'origine O, est définie par les trois coordonnées :

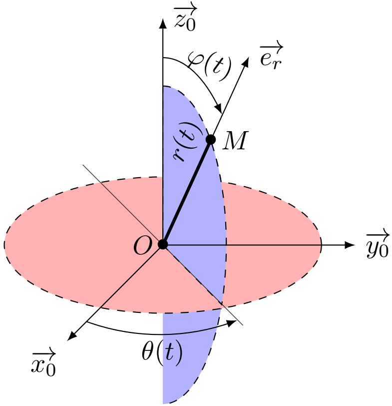
$$r(t) \in \mathbb{R}^+, \quad \theta(t) \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad \varphi(t) \in [0, \pi]$$

de sorte que le vecteur position s'écrive :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{e_r}, \qquad \overrightarrow{e_r} \overset{\text{déf.}}{=} \overrightarrow{e_r}(\theta(t), \varphi(t))$$

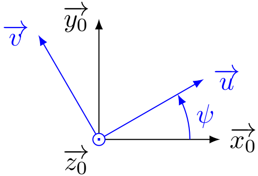
Lien avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\theta(t))\sin(\varphi(t)) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t))\sin(\varphi(t)) \\ z(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \end{cases}$$

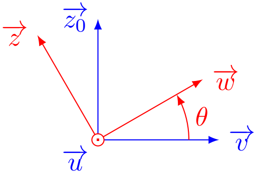


Angles d'Euler (♡)

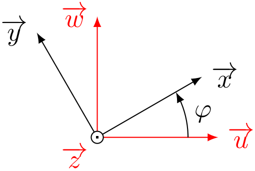
$$(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}) \xrightarrow[\textit{Précession}]{\mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{z_0}, \psi\right)} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z_0}) \xrightarrow[\textit{Nutation}]{\mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{u}, \theta\right)} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}) \xrightarrow[\textit{Rotation propre}]{\mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{z}, \varphi\right)} (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$$



Précession



Nutation

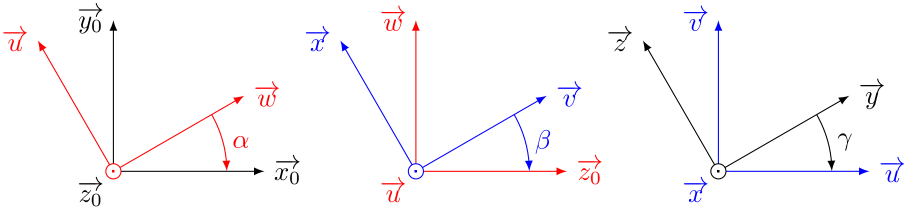


Rotation propre

▸ animation

Angles de Cardan

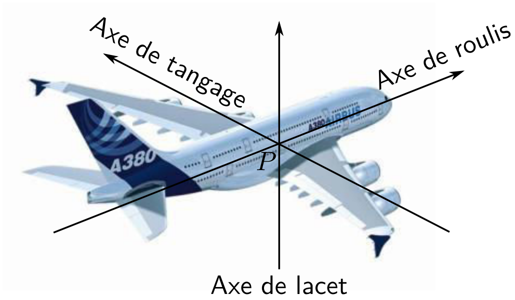
$$(\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}) \xleftarrow[\textit{Lacet}]{\text{Rot}(\vec{z_0},\alpha)} (\vec{w},\vec{u},\vec{z_0}) \xleftarrow[\textit{Tangage}]{\text{Rot}(\vec{u},\beta)} (\vec{x},\vec{u},\vec{v}) \xleftarrow[\textit{Roulis}]{\text{Rot}(\vec{x},\gamma)} (\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$



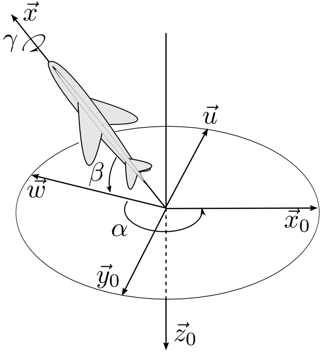
Lacet *Tangage* *Roulis*

Transformation utilisée en aéronautique et abrégée **RTL**

Angles de Cardan : axes & angles nautiques



(a) Axes nautiques

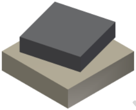
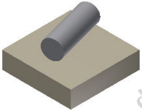
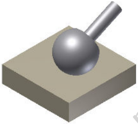
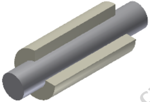
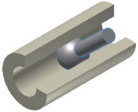
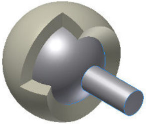


(b) Angles nautiques

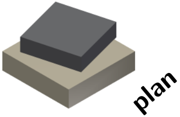
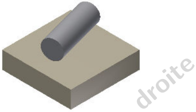
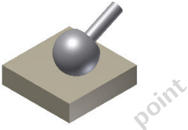
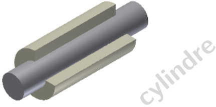
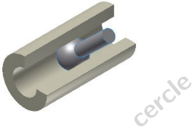
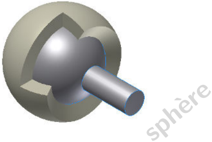
1 2 3

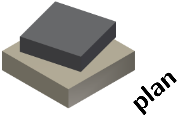
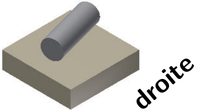
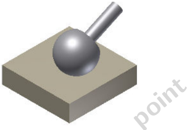
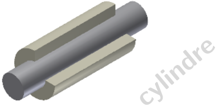
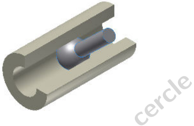
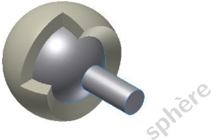
Modélisation et paramétrage des mécanismes

Surfaces élémentaires & géométrie des contacts

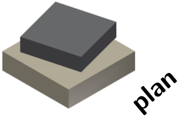
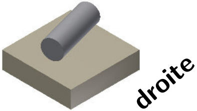
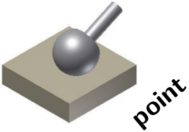
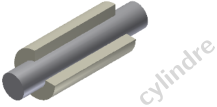
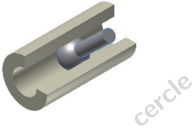
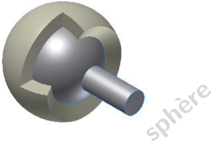
	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	 plan	 droite	 point
Cylindre		 cylindre	 cercle
Sphère			 sphère

Surfaces élémentaires & géométrie des contacts

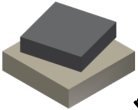
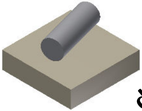
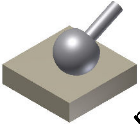
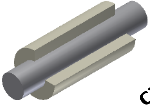
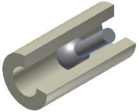
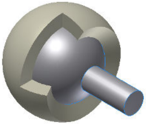
	Plan	Cylindre	Sphère
Plan			
Cylindre			
Sphère			

	Plan	Cylindre	Sphère
Plan			
Cylindre			
Sphère			

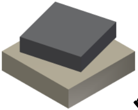
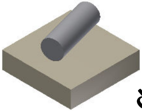
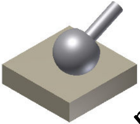
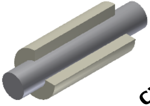
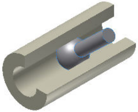
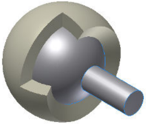
Surfaces élémentaires & géométrie des contacts

	Plan	Cylindre	Sphère
Plan			
Cylindre			
Sphère			

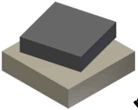
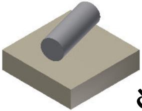
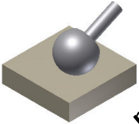
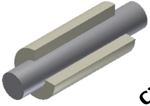
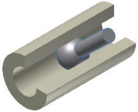
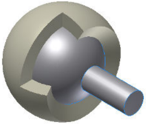
Surfaces élémentaires & géométrie des contacts

	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	 plan	 droite	 point
Cylindre		 cylindre	 cercle
Sphère			 sphère

Surfaces élémentaires & géométrie des contacts

	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	 plan	 droite	 point
Cylindre		 cylindre	 cercle
Sphère			 sphère

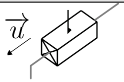
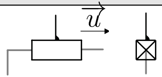
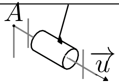
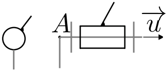
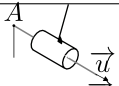
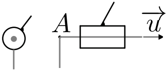
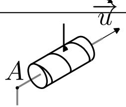
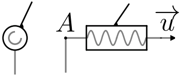
Surfaces élémentaires & géométrie des contacts

	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	 plan	 droite	 point
Cylindre		 cylindre	 cercle
Sphère			 sphère

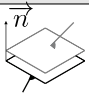
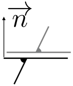
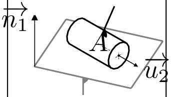
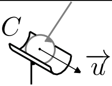
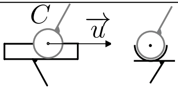
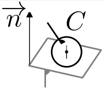
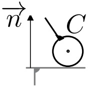
Classe d'équivalence

Définition (Classe d'équivalence)

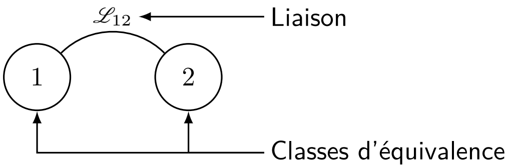
Une classe d'équivalence est un ensemble de pièces en liaison complète ou encastrement, démontable ou non. Toutes les pièces faisant partie d'une même classe d'équivalence ont donc le même mouvement lors du fonctionnement du mécanisme.

Liaison	Schém. spatiale	Schém. plane	Repère local	Mobilité(s)
Glissière			direction $\vec{u}$	1 translation
Pivot			axe $(A, \vec{u})$	1 rotation
Pivot glissant			axe $(A, \vec{u})$	1 translation 1 rotation
Hélicoïdale			axe $(A, \vec{u})$	1 translation & 1 rotation liées

Liaisons normalisées (2/2)

Liaison	Schém. spatiale	Schém. plane	Repère local	Mobilité(s)
Appui-plan			normale $\overrightarrow{n}$	2 translations 1 rotation
Sphérique			centre C	3 rotations
Cylindre-plan			normale $(A, \overrightarrow{n_1})$ + axe $(A, \overrightarrow{u_2})$	2 translations 2 rotations
Spère-cylindre			axe $(C, \overrightarrow{u})$	1 translation 3 rotations
Sphère-plan			normale $(C, \overrightarrow{n})$	2 translations 3 rotations

Graphe de structure



Analyse du graphe

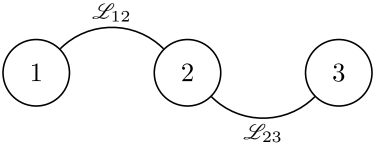
Cycle = chemin fermé ne parcourant jamais 2 fois le même sommet
Nombre cyclomatique = nombre de cycles indépendants

$$\gamma = L - S + 1$$

où L est le nombre de liaisons et S le nombre de solides.

Graphe de structure

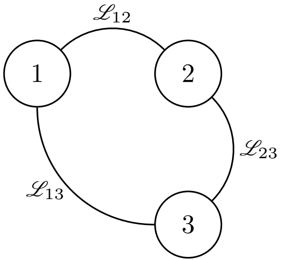
Chaîne ouverte ($\gamma = 0$)



- pas de cycle : $\gamma = 0$
- graphe typique de la robotique
- on peut avoir un déplacement maximal en fin de chaîne avec un minimum de liaisons.

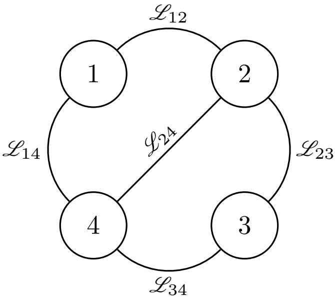
Graphe de structure

Chaîne fermée ($\gamma = 1$)



1 cycle indépendant ($\gamma = 1$) permet de relier toutes les classes d'équivalence
$\Rightarrow$ les paramètres des liaisons du système ne sont pas indépendants
$\Rightarrow$ on peut écrire deux équations vectorielles de fermeture géométrique : une linéaire et une angulaire.

Chaîne complexe ($\gamma > 1$)



Les systèmes sont souvent basés sur des chaînes complexes contenant plusieurs cycles indépendants : $\gamma > 1$.
Dans l'exemple ci-contre on a $\gamma = 5 - 4 + 1 = 2$ cycles sont indépendants.
$\Rightarrow$ on peut écrire 2γ équations de fermeture géométrique conduisant à 6γ équations scalaires.

Schéma cinématique

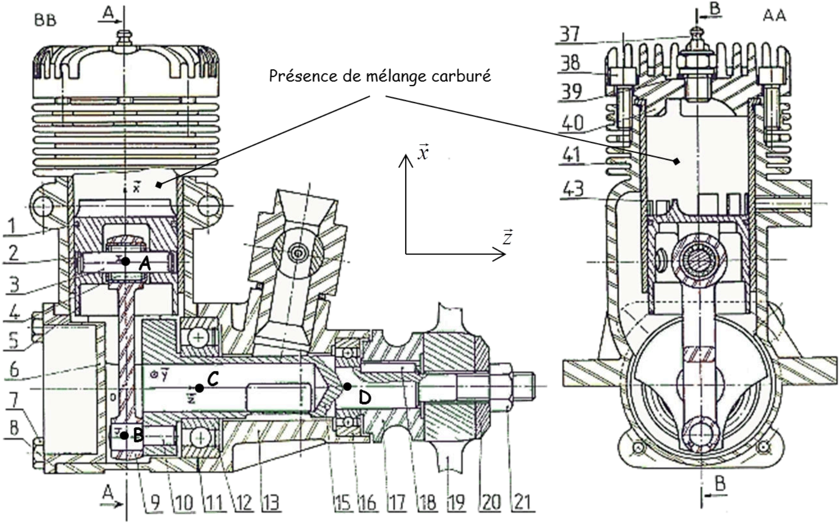
Le schéma cinématique minimal est un outil de communication technique qui doit traduire la structure d'un système d'un point de vue mécanique.

Méthodologie de construction :

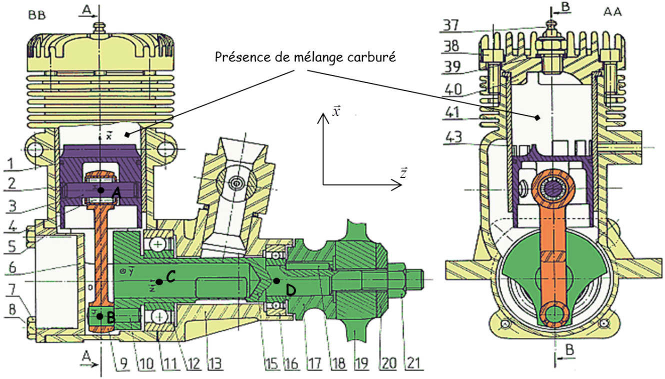
1. identifier les entrées et sorties du mécanisme ;
2. identifier les chaînes cinématiques internes au mécanisme ;
3. déterminer les classes d'équivalence ;
4. identifier les contacts et associer un modèle de liaison ;
5. construire le graphe de structure.
6. construire le schéma cinématique (d'architecture)
7. simplifier le schéma cinématique

$\Rightarrow$ **schéma cinématique minimal**

Exemple : Moteur thermique d'aéromodélisme



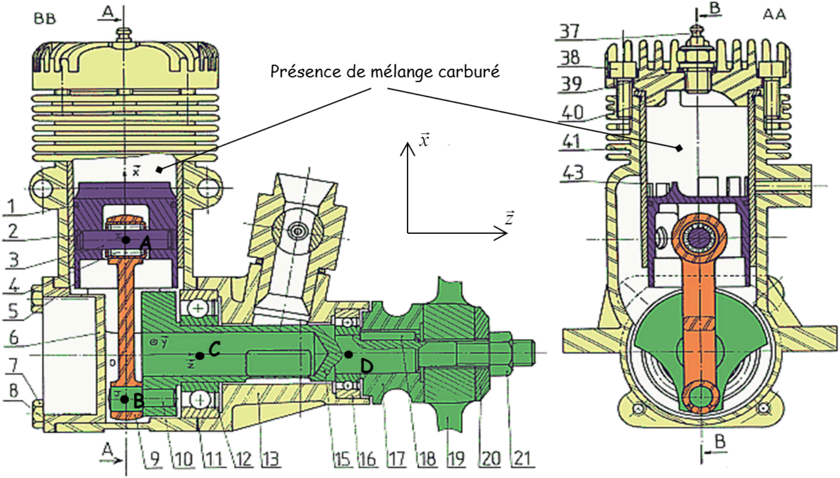
Exemple : Moteur thermique d'aéromodélisme



Classes d'équivalence :

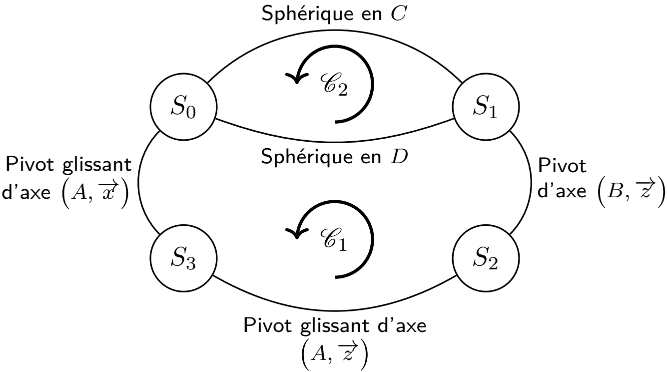
- Carter $S_0 = \{6, 7, 8, 11, 13, 37, 38, 39, 40, 41, 43\}$
- Vilebrequin $S_1 = \{10, 15, 17, 19, 20, 21\}$
- Bielle $S_2 = \{9\}$
- Piston $S_3 = \{1, 2, 3, 5\}$

Exemple : Moteur thermique d'aéromodélisme



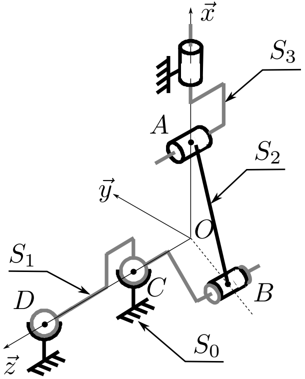
Exemple : Moteur thermique d'aéromodélisme

Graphe de structure



5 liaisons $(L = 5)$ & 4 solides $(S = 4)$ $\Rightarrow \gamma = 5 - 4 + 1 = 2$ cycles indépendants

Schéma cinématique



Exemple : Moteur thermique d'aéromodélisme

Schéma cinématique

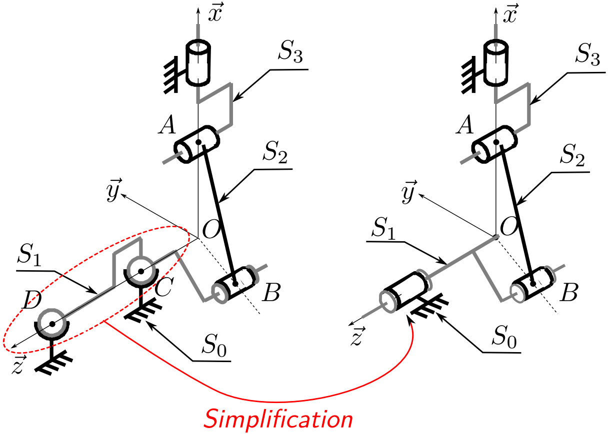
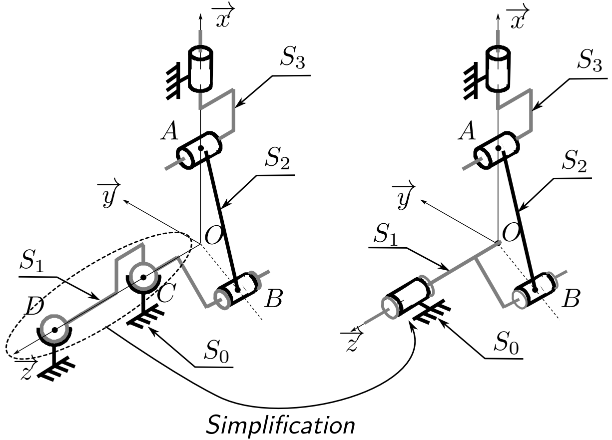
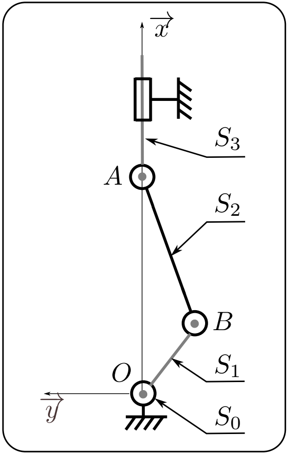


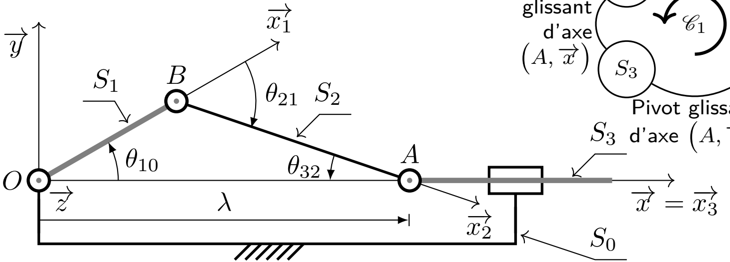
Schéma cinématique minimal

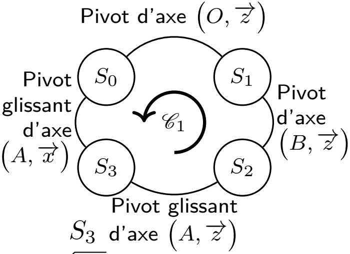




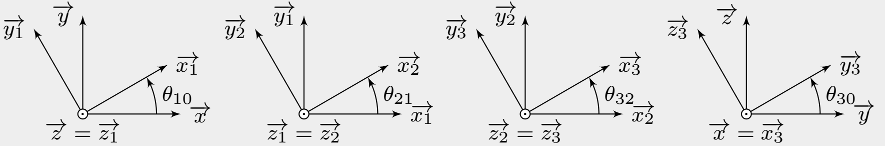
Exemple : Moteur thermique d'aéromodélisme

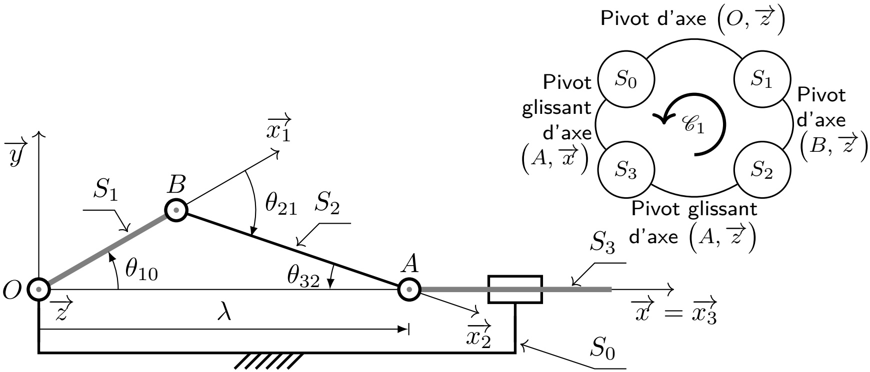
Schéma cinématique minimal





Figures géométrales :





Loi entrée-sortie du mécanisme :

$$\lambda = e\ \cos(\theta_{10}) + \sqrt{(\ell_b)^2 - e^2 \sin^2(\theta_{10})}$$