

Calcul de primitives

Exercice 1 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^1 (2t^2 - 3) dt$
2. $\int_{-1}^x (2s + 1)^4 ds$
3. $\int_0^x \frac{dt}{(2t+1)^4}$
4. $\int_x^2 \sqrt{u+1} du$
5. $\int_{2x}^{x^2} 2s(s^2 + 1)^3 ds$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) \sin^5(2t) dt$
7. $\int_1^{1+2x} \frac{\ln(u)}{u} du$

Exercice 2 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-x}^x \sin(3t) dt$
2. $\int_{x^2}^1 \cos\left(\frac{s-1}{2}\right) ds$
3. $\int_0^x \cos^2(t) dt$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin^2(5u) du$
5. $\int_{-x^2}^{2x^2} e^{3t} dt$
6. $\int_0^1 e^{(2i-5)t} dt$
7. $\int_1^x s e^{2s^2} ds$

Exercice 3 (★). Après avoir justifié leur existence (ou éventuellement avoir déterminé pour quels $x \in \mathbb{R}$ elles étaient définies), calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_3^x \frac{1}{t+2} dt$
2. $\int_{-5}^x \frac{1}{t+2} dt$
3. $\int_{-1}^x \frac{1}{3-2s} ds$
4. $\int_{-1}^1 \frac{2u+1}{1+u+u^2} du$
5. $\int_0^{3x} \tan(t) dt$
6. $\int_{-1}^0 \frac{3t}{\sqrt{2t^2+1}} dt$
7. $\int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{e^s \sqrt{2e^{-s}+1}} ds$

Exercice 4 (★). Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \cos(t)e^{-t}$
2. $f_2 : t \mapsto \sin(2t)e^t$
3. $f_3 : t \mapsto \sin^2(t)e^t$

Exercice 5 (★). Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_1^2 t \ln(t) dt$
2. $B = \int_0^1 t \arctan(t) dt$

Exercice 6 (★). En procédant par intégration par parties, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto t \sin(t)$
2. $f_2 : t \mapsto t \ln(t)$
3. $f_3 : t \mapsto t^2 e^{-t}$
4. $f_4 : t \mapsto \arctan(t)$
5. $f_5 : t \mapsto t \sin(t) \cos(2t)$

Exercice 7 (★). Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $M = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin^2(x) dx \quad (u = \sin(x))$
2. $L = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t+1}} \quad (u = \sqrt{t+1})$

Exercice 8 (★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $f_1 : t \mapsto \frac{2t}{1+t^4}$
2. $f_2 : t \mapsto \frac{e^{2t}}{1+e^t}$
3. $f_3 : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$
4. $f_4 : t \mapsto \frac{\sin(t) \cos(t)}{\sin^2(t)+1}$

Exercice 9 (★★). Calculer l'intégrale $I = \int_1^4 \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2} dx$ en posant le changement de variable $t = \frac{4}{x}$.

Exercice 10 (★★). En utilisant des changements de variables, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle de validité de la primitive calculée.

1. $g_1 : t \mapsto \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$
2. $g_2 : t \mapsto \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$
3. $g_3 : t \mapsto \arcsin^2(t)$

Indication : pour g_2 , poser $t = \sin(s)$.

Exercice 11 (★). Déterminer une primitive (intervalle(s) de validité à préciser) de :

1. $f : t \mapsto \frac{1}{2t+1}$
2. $g : t \mapsto \frac{2t}{2t+1}$
3. $h : t \mapsto \frac{3t+1}{2t+1}$

Exercice 12 (★). Déterminer une primitive (intervalle(s) de validité à préciser) de :

1. $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 2t - 3}$
2. $\psi : t \mapsto \frac{1}{2t^2 - 3t - 2}$
3. $\mu : t \mapsto \frac{1}{4t^2 + 4t + 1}$
4. $u : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 4t + 5}$
5. $v : t \mapsto \frac{1}{t^2 + t + 1}$

Exercice 13 (★★). Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition les intégrales suivantes sont-elles définies, et que valent-elles ?

- | | | | |
|--------------------------------------|--|---------------------------------------|--|
| 1. $\int_0^\pi (1-pt) \sin(pt) dt$ | 2. $\int_{-1}^x (t+x)^p dt$ | 3. $\int_0^1 \frac{e^{2s}}{e^s+1} ds$ | 4. $\int_{-x}^x \frac{ds}{\sqrt{1-as}}$ |
| 5. $\int_0^{e^p} \ln(1+r^2) dr$ | 6. $\int_1^2 \frac{dt}{t+t \ln(t)}$ | 7. $\int_{-a}^{2a} t \sqrt{p-t^2} dt$ | 8. $\int_1^x \frac{\ln(au)}{\sqrt{2u}} du$ |
| 9. $\int_0^{x^2} \frac{ds}{s^2-p^2}$ | 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) e^{a \sin(t)} dt$ | | |

Exercice 14 (★). Étudier le sens de variation de la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \int_{-2}^x \frac{u-1}{u^4+1} du$.

Exercice 15 (★). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est impaire sur $[-a, a]$, que peut-on dire de $\int_{-a}^a f(x) dx$? Prouvez-le.
2. Même question si f est paire.
3. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Si f est T -périodique sur $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que peut-on dire de $\int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$? Prouvez-le.

Exercice 16 (★★★). Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle et vérifiant pour tous x, y réels, $f(x+y) = f(x)f(y)$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 (Type DS). Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, justifier l'existence de $I(p, q)$. Calculer $I(0, 0)$, $I(1, 0)$ et $I(1, 1)$.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p, q) = I(q, p)$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $I(p, 0)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$.
5. Dédire des deux questions précédentes la valeur pour $p \in \mathbb{N}$ de $I(p, 1)$, puis celle de $I(p, 2)$.
6. Montrer par récurrence que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
7. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur de l'intégrale $J(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(\theta) \cos^{2q+1}(\theta) d\theta$.
Indication : poser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.