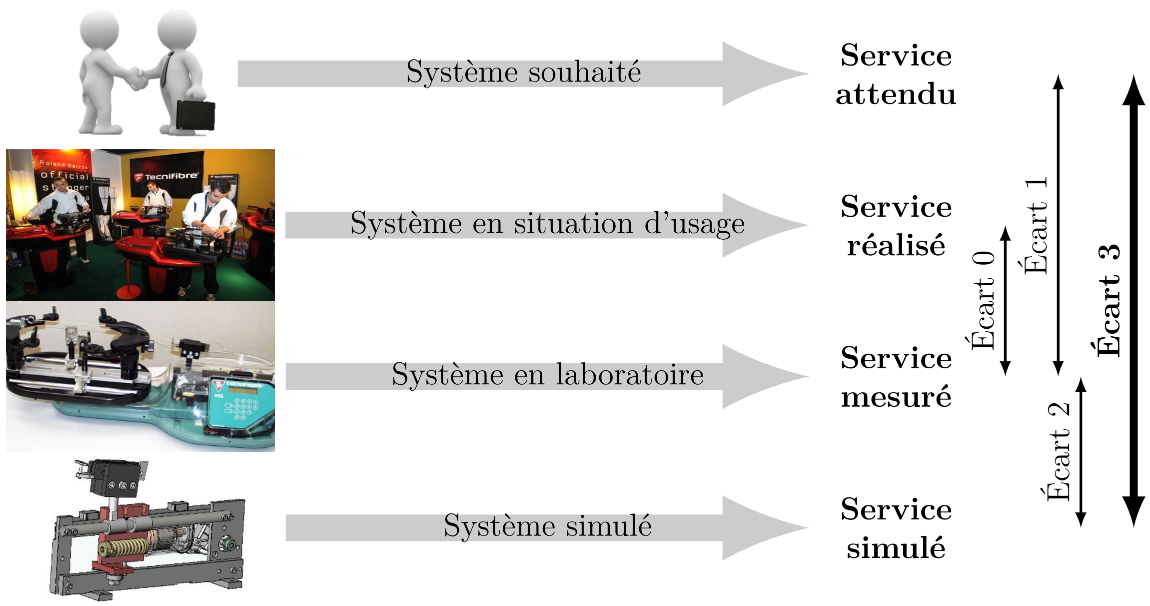
SII – PCSI / Séquence n° 4 – Modélisation des systèmes,
paramétrage cinématique

Modélisation des systèmes et paramétrage cinématique

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Activités de TD

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Exercices

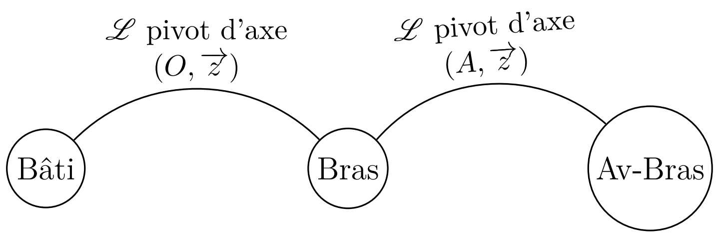
Nicolas Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des PCSI
https://cahier-de-prepa.fr/pcsi-perrin
— Version du 25 novembre 2025 —

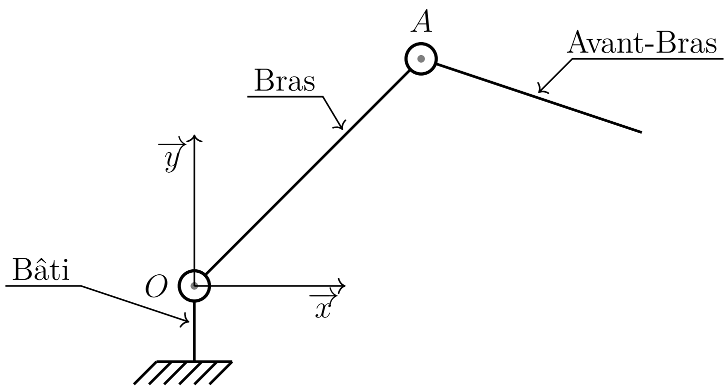
— Exercice 1 —

Modélisation cinématique de trois systèmes

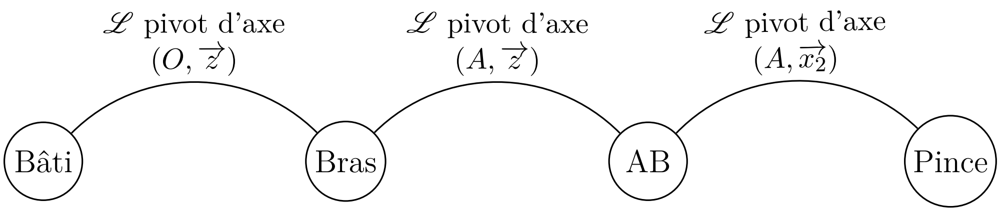
1.1 Robot Ericc3

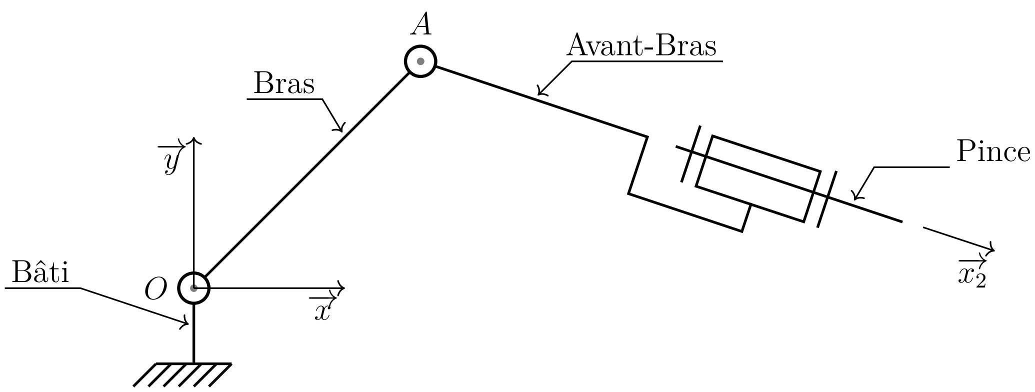
Sous-système 1



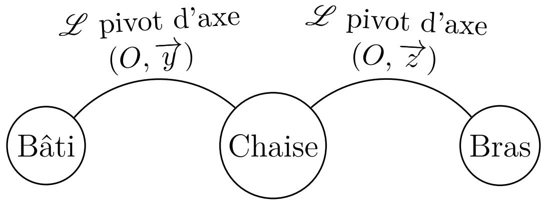


Sous-système 2





Sous-système 3



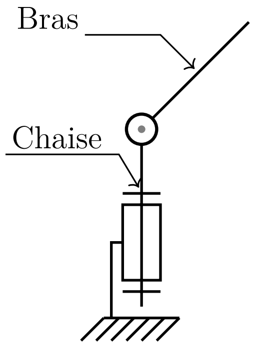
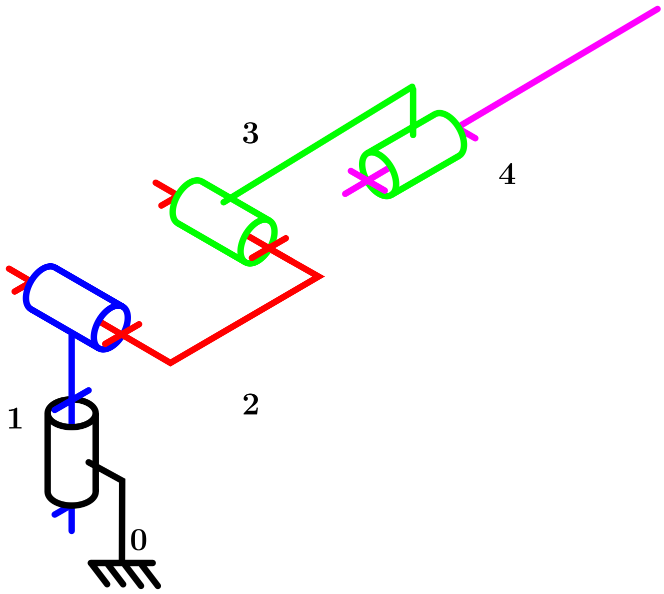
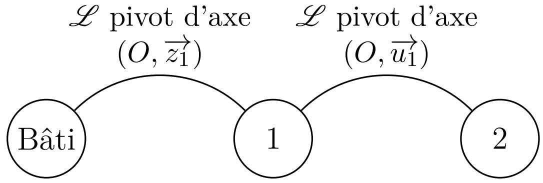
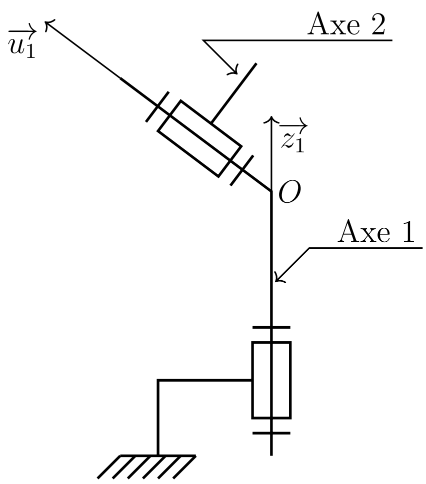


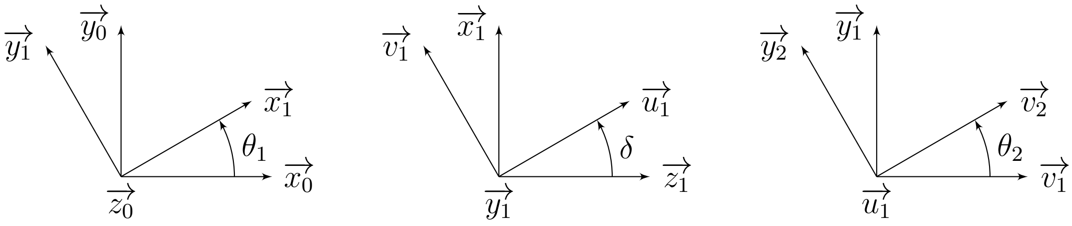
Schéma cinématique de l'ensemble du robot :



1.2 Tête de fraise Huron

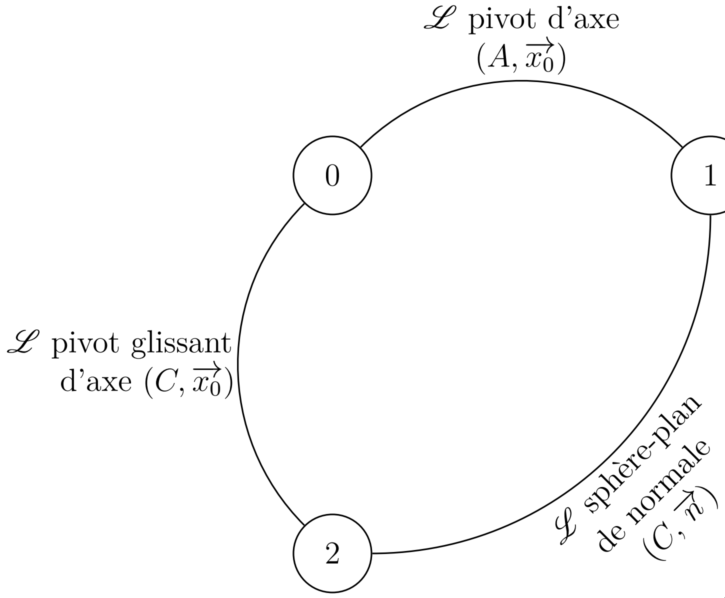


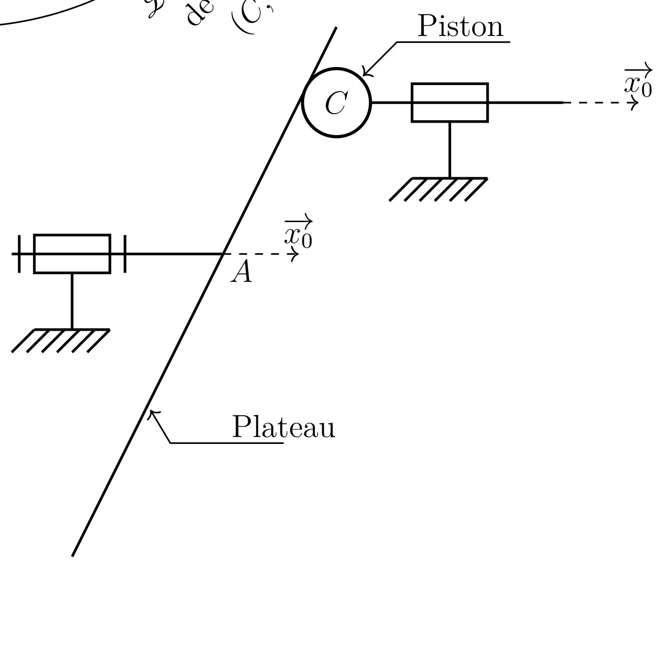


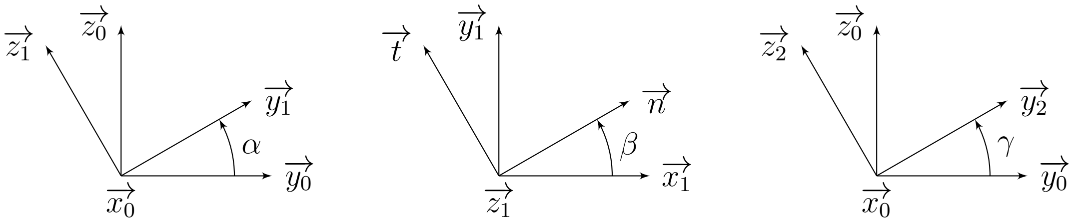


δ fixe

1.3 Pompe à pistons axiaux







β fixe

Le mouvement d'entrée est associé à l'angle α.
Le mouvement de sortie est associé à la position λ telle que

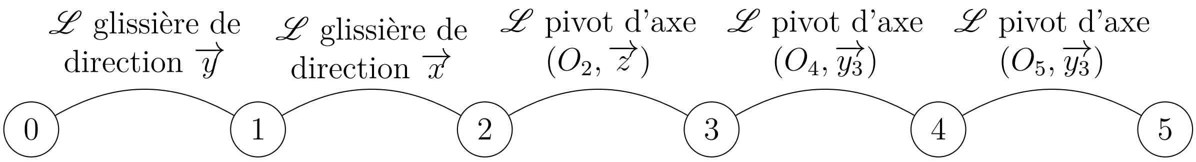
$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{x_0} + h \overrightarrow{y_0}, \qquad \lambda \text{ variable.}$$

L'angle γ est une mobilité interne.

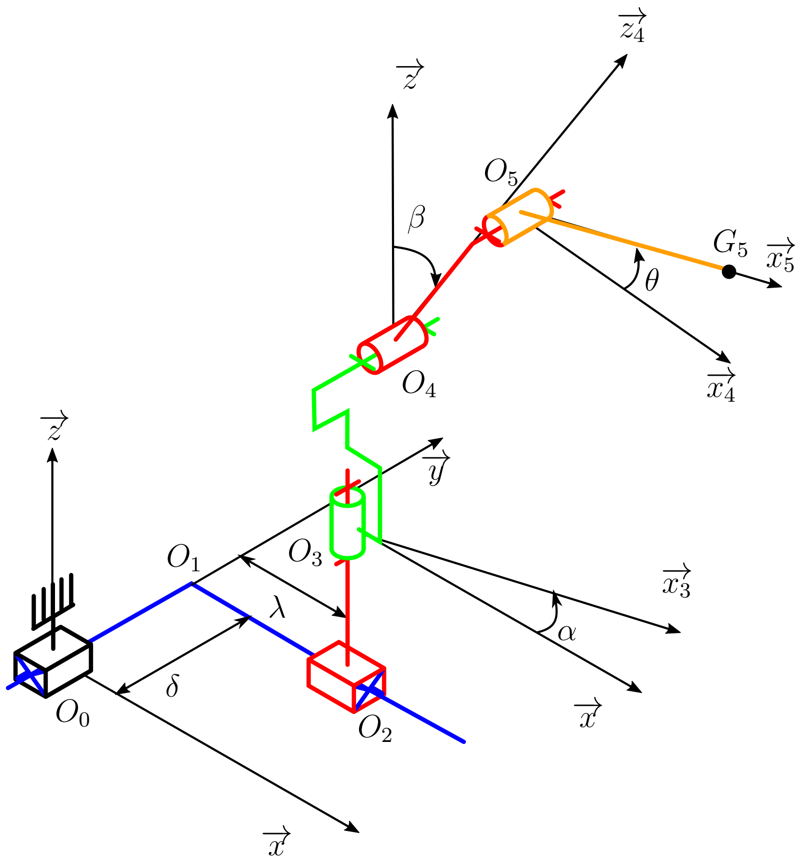
— Exercice 2 —

Extracteur de pièces de fonderie

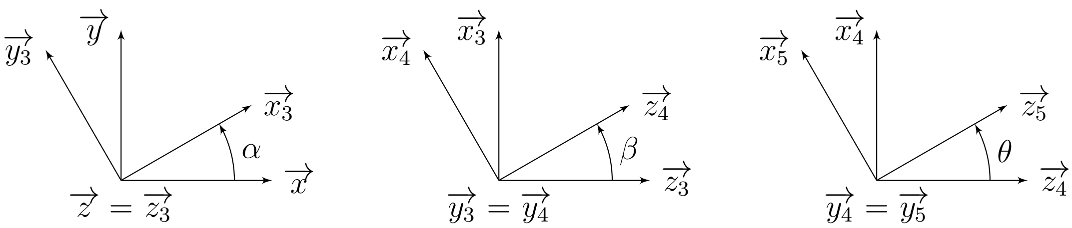
Question 2.1.



Question 2.2.



Question 2.3.



Question 2.4. Par relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_0G_5} &= \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_5} \\ &= \delta\,\overrightarrow{y} + \lambda\,\overrightarrow{x} + (c+d)\,\overrightarrow{z} + h\overrightarrow{z_4} + b\overrightarrow{x_5}\end{aligned}$$

Question 2.5. D'après la figure géométrale reliant les bases $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_5$, on a :

$$\overrightarrow{x_5} = \cos(\theta)\overrightarrow{x_4} - \sin(\theta)\overrightarrow{z_4}$$

Question 2.6. Comme les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_2$ sont confondues, on a $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{0}$.

D'après la première figure géométrale de normale $\overrightarrow{z}$ et de variation d'angle $\dot{\alpha}$, il vient :

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z}$$

De même, avec les deux autres figures géométrales, on trouve :

$$\overrightarrow{\Omega_{4/3}} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_3} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\Omega_{5/4}} = \dot{\theta}\overrightarrow{y_3}$$

Il vient alors par composition des taux de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \overrightarrow{\Omega_{4/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_3} + \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z}$$

et

$$\overrightarrow{\Omega_{5/0}} = \overrightarrow{\Omega_{5/4}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \left(\dot{\beta} + \dot{\theta}\right)\overrightarrow{y_3} + \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z}$$

Question 2.7.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{z_4} &= \overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{z_4} = \sin(\beta)\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{z_4} &= \overrightarrow{y_4} \wedge \overrightarrow{z_4} = \overrightarrow{x_4} \\ \overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{x_5} &= \overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{x_5} = \cos(\theta+\beta)\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{x_5} &= \overrightarrow{y_5} \wedge \overrightarrow{x_5} = -\overrightarrow{z_5}\end{aligned}$$

Question 2.8. Par définition, la vitesse du point G_5 appartenant à **5** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ est

$$\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_0G_5}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \dot{\delta}\,\overrightarrow{y} + \dot{\lambda}\,\overrightarrow{x} + h\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} + b\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_5}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0}$$

Avec, par formule de dérivation vectorielle :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_4}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_4}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \wedge \overrightarrow{z_4} = \left(\dot{\beta}\overrightarrow{y_3} + \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z}\right) \wedge \overrightarrow{z_4} = \dot{\beta}\overrightarrow{x_4} + \dot{\alpha}\sin(\beta)\overrightarrow{y_3}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_5}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_5}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_5}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{5/0}} \wedge \overrightarrow{x_5} = \left(\left(\dot{\beta} + \dot{\theta}\right)\overrightarrow{y_3} + \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z}\right) \wedge \overrightarrow{x_5} = -\left(\dot{\beta} + \dot{\theta}\right)\overrightarrow{z_5} + \dot{\alpha}\cos(\theta+\beta)\overrightarrow{y_3}$$

il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \dot{\delta}\,\overrightarrow{y} + \dot{\lambda}\,\overrightarrow{x} + h\left(\dot{\beta}\overrightarrow{x_4} + \dot{\alpha}\sin(\beta)\overrightarrow{y_3}\right) + b\left(\dot{\alpha}\cos(\theta+\beta)\overrightarrow{y_3} - \left(\dot{\beta} + \dot{\theta}\right)\overrightarrow{z_5}\right)}$$

Si seules les liaisons $\mathscr{L}_{1/0}$ et $\mathscr{L}_{4/3}$ sont actives, alors on a $\dot{\lambda} = 0$ et $\dot{\alpha} = \dot{\theta} = 0$. Avec de plus $\alpha = \theta = 0$, il vient :

$$\overrightarrow{V_{G_5,5/0}} = \dot{\delta}\,\overrightarrow{y} + \dot{\beta}\left(h\overrightarrow{x_4} - b\overrightarrow{z_5}\right)$$

Question 2.9. Par définition, l'accélération du point G_5 appartenant à **5** dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ est :

$$\overrightarrow{\Gamma_{G_5,5/0}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_{G_5,5/0}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \ddot{\delta}\,\overrightarrow{y} + \ddot{\beta}\left(h\overrightarrow{x_4} - b\overrightarrow{z_5}\right) + \dot{\beta}\left(h\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_4}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} - b\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_5}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0}\right)$$

Avec $\ddot{\beta} = 0$ et

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_4}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x_4}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_4}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \wedge \overrightarrow{x_4} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{x_4} = -\dot{\beta}\overrightarrow{z_4}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_5}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_0} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{z_5}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{B}_5}}_{\overrightarrow{0}} + \overrightarrow{\Omega_{5/0}} \wedge \overrightarrow{z_5} = \dot{\beta}\overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{z_5} = \dot{\beta}\overrightarrow{x_5}$$

il vient finalement

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G_5,5/0}} = \ddot{\delta}\,\overrightarrow{y} - \dot{\beta}^2\left(h\overrightarrow{z_4} + b\overrightarrow{x_5}\right)}$$

Question 2.10. Pour conclure quant au respect du cahier des charges, il est nécessaire que calculer la norme de la vitesse et de l'accélération, mais il manque les valeurs maximales de $\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$ et $\dot{\beta}$.