# Matrices et systèmes linéaires

Cours de É. Bouchet – PCSI

9 octobre 2025

## Table des matières

Dans tout le chapitre, $n$, $p$, $q$ désignent des éléments de $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appelle scalaires les éléments de $\mathbb{K}$, en prévision des chapitres du second semestre.

# 1 Ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

## 1.1 Définitions

**Définition 1.1** (Matrice)

Une **matrice** à $n$ lignes et $p$ colonnes (ou matrice de taille $n \times p$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau à $n$ lignes et $p$ colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. Si $A$ est une telle matrice, on note $a_{ij}$ le terme de la $i$-ième ligne et $j$-ième colonne :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

**Remarque.** On écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, ou plus simplement $A = (a_{ij})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

**Remarque.** Quelques cas particuliers importants :
— si $p = n$, $A$ est appelée **matrice carrée** d'ordre $n$ et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— si $n = 1$, $A$ est appelée **matrice ligne ou vecteur ligne**.
— si $p = 1$, $A$ est appelée **matrice colonne ou vecteur colonne**.
— si $n = 1$ et $p = 1$, $A$ est souvent confondue avec le nombre $a_{11} \in \mathbb{K}$.

**Définition 1.2** (Égalité de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que les deux matrices $A$ et $B$ sont égales et on note $A = B$ lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} = b_{ij}$.

## 1.2 Addition de matrices et multiplication par un scalaire

**Définition 1.3** (Addition de matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de $A$ et $B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $A + B = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ avec pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

**Exemple.** On a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Remarque.** Soit $A$, $B$ et $C$ des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'addition est une opération interne dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et :

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$,
2. $A + B = B + A$,
3. $A + 0 = A = 0 + A$ en notant $0$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls.
4. $A + (-A) = 0 = (-A) + A$ en notant $-A$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le terme de la $i$-ième ligne et $j$-ième colonne est $-a_{ij}$.

**Définition 1.4** (Multiplication d'une matrice par un scalaire)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La multiplication externe du scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ par la matrice $A$, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\alpha A = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ avec pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = \alpha \times a_{ij}$.

**Exemple.** On a : $2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

**Remarque.** Dans une multiplication entre un scalaire et une matrice, le scalaire doit toujours être écrit à gauche de la matrice.

**Remarque.** Soit $\alpha$ et $\beta$ des éléments de $\mathbb{K}$, et $A$ et $B$ des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La multiplication d'un scalaire par une matrice est définie de $\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et vérifie :

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$,
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $1A = A$.

## 1.3 Matrices $E_{i,j}$

**Définition 1.5** (Matrice $E_{i,j}$)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On appelle $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf un 1 à la $i$-ème ligne et $j$-ème colonne.

**Exemple.** Dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Remarque.** La notation $E_{i,j}$ ne précise pas la taille de la matrice, juste la position du coefficient non nul. Dans les exercices, on se repose donc sur le contexte pour déterminer le nombre de lignes et de colonnes.

**Proposition 1.6** (Décomposition selon les $E_{i,j}$)

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices $E_{i,j}$.

**Exemple.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 1E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{2,1} + 4E_{2,2} + 5E_{3,1} + 6E_{3,2}$.

## 1.4 Produit matriciel

**Définition 1.7** (Produit de matrices)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices. On appelle produit des matrices $A$ et $B$ et on note $AB$ la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ qui vérifie : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

**Exercice 1.** Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $AB$.

**Remarque.** Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le produit matriciel $AB$ correspond à la succession des produit de la matrice $A$ par les vecteurs colonnes de la matrice $B$.

**Remarque.** Si $X$ est une matrice colonne, $AX$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A$, et les coefficients de la combinaison linéaire sont les coefficients de $X$.

**Exemple.** On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. On a : $AX = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$.

**Proposition 1.8** (Propriétés du produit matriciel)

Le produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $(A,B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+B)\,C = AC + BC$,
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B,C) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))^2$, $A\,(B+C) = AB + AC$,
3. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $A\,(\alpha.B) = \alpha.(AB) = (\alpha.A)\,B$,
4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)\,C = A\,(BC)$,

**Remarque.** Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, les deux produits $AB$ et $BA$ sont possibles. ATTENTION : dans le cas général, $AB \neq BA$.

**Exemple.** Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Alors $AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $BA = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.
Notons au passage qu'on peut donc trouver $A$ et $B$ deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$.

**Définition 1.9** (Symbole de Kronecker)

Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit la notation suivante : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

**Proposition 1.10** (Produit de matrices $E_{i,j}$)

Soit $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, alors $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

**Remarque.** Dans ce produit matriciel, on a $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $E_{i,l} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

**Exemple.** Quand les produits matriciels sont compatibles, on trouve $E_{1,1} \times E_{1,2} = E_{1,2}$, $E_{1,1} \times E_{2,1} = 0$ (la matrice nulle), $E_{1,3} \times E_{3,2} = E_{1,2}$.

### 1.5 Transposée

**Définition 1.11** (Transposée)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **matrice transposée** de $A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée $A^\top$ qui vérifie $A^\top = (a_{ji})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

**Exemple.** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)^\top = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^\top = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

**Proposition 1.12** (Transposée de la somme)

Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, on a $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

**Proposition 1.13** (Transposée du produit)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

## 2 Opérations élémentaires

### 2.1 Matrice identité

**Définition 2.1** (Matrice identité)

On appelle **matrice identité** de taille $n$ la matrice carrée $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple.** On a $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $I_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

**Proposition 2.2** (Produits avec la matrice identité)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A = A I_p$.

## 2.2 Opérations élémentaires et matrices associées

**Définition 2.3** (Opérations élémentaires)

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice les opérations suivantes :

1. échange de deux lignes $L_i$ et $L_j$ avec $i \neq j$, codifiée : $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. multiplication de la ligne $L_i$ par $\lambda \in \mathbb{K}^*$, codifiée : $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.
3. addition de la ligne $L_i$ et d'un multiple de $L_j$ avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, codifiée : $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.

**Définition 2.4** (Matrice de permutation)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On appelle **matrice de permutation** la matrice $P_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ sur la matrice identité $I_n$ :

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

**Exemple.** Dans le cas $n = 3$, $P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix}$, $P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}$.

**Définition 2.5** (Matrice de dilatation)

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle **matrice de dilatation** la matrice $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ sur la matrice identité $I_n$ :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}.$$

**Exemple.** Dans le cas $n = 3$, $D_1(2) = \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $D_2(3i) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&3i&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $D_3(\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

**Définition 2.6** (Matrice de transvection)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle **matrice de transvection** la matrice $T_{i,j}(\alpha) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur la matrice identité $I_n$ :

$$T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}.$$

**Exemple.** Dans le cas $n = 3$, $T_{1,2}(2) = \begin{pmatrix} 1&2&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $T_{1,3}(5) = \begin{pmatrix} 1&0&5\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $T_{3,1}(5) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\5&0&1 \end{pmatrix}$, $T_{2,3}(4i) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&4i\\0&0&1 \end{pmatrix}$.

**Proposition 2.7** (Opérations élémentaires et produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les produits matriciels $P_{i,j}A$, $D_i(\lambda)A$ et $T_{i,j}(\alpha)A$ reviennent à effectuer les opérations élémentaires $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ et $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur la matrice $A$.

**Exemple.** On trouve par calcul : $P_{1,2}\begin{pmatrix} 0&1&0&6\\2&0&9&0\\0&3&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0&6\\2&0&9&0\\0&3&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&0&9&0\\0&1&0&6\\0&3&0&1 \end{pmatrix}$.

**Remarque.** En multipliant à droite plutôt qu'à gauche, les même opérations s'appliqueraient aux colonnes plutôt qu'aux lignes. Traditionnellement, on a plus tendance à travailler sur les lignes.

# 3 Système linéaire

## 3.1 Définitions

**Définition 3.1** (Système linéaire)

On appelle **système linéaire** de $n$ équations à $p$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tout système $(\mathcal{S})$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

**Définition 3.2** (Solution d'un système linéaire)

Un $p$-uplet de scalaires est **solution du système** $(\mathcal{S})$ s'il est solution de toutes les équations du système.

— **Résoudre** le système $(\mathcal{S})$ c'est déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$.
— Un système est dit **compatible** s'il existe au moins un $p$-uplet solution.
— Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

**Définition 3.3** (Système homogène)

On appelle **système homogène** un système dont tous les seconds membres $b_i$ sont nuls.
On appelle **système homogène associé** à un système $(\mathcal{S})$ le système homogène $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant tous les $b_i$ par 0.

**Exemple.** Le système homogène associé de $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ est $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$.

**Remarque.** Un système homogène a toujours au moins une solution : $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$.

## 3.2 Écriture matricielle d'un système linéaire

**Définition 3.4** (Matrice associée)

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la **matrice associée** au système $(\mathcal{S})$.

**Remarque.** Si l'on pose $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, résoudre $(\mathcal{S})$ équivaut à chercher l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tels que $AX = B$.

**Exemple.** On considère le système linéaire $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$. Sa matrice associée est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et résoudre le système revient à chercher les réels $x_1$, $x_2$ tels que $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Proposition 3.5** (Ensemble des solutions d'un système compatible)

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire de forme matricielle $AX = B$. Si $(\mathcal{S})$ est compatible, alors ses solutions sont les éléments de la forme $X_0 + Y$, où $X_0$ est une solution particulière et où $Y$ est solution du système homogène associé.

**Remarque.** Ce résultat permettra de faire le lien avec des propriétés du second semestre, mais est peu utilisé pour les résolutions concrètes de systèmes linéaires.

**Remarque.** On a vu plus tôt dans le chapitre que si $X$ est une matrice colonne de coefficients $x_1, \ldots, x_n$ et si $A$ est une matrice dont on note $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes, alors $AX$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A$, avec $AX = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$. Si on trouve des scalaires $b_1, \ldots, b_n$ tels que $B = \sum_{i=1}^{n} b_i A_i$, alors le vecteur $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est solution du système $AX = B$, qui est donc compatible (et on a au passage obtenu une solution particulière).

### 3.3 Résolution par pivot de Gauss

Soit $(S)$ est un système linéaire :
- si l'on exécute $L_i \longleftrightarrow L_j$, il suffit de refaire $L_i \longleftrightarrow L_j$ pour revenir au système $(S)$.
- idem si l'on exécute $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \neq 0$, il suffit de faire $L_i \longleftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$ (d'où l'importance de $\lambda \neq 0$) pour revenir au système $(S)$.
- et si l'on exécute $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, il suffit de faire $L_i \longleftarrow L_i - \lambda L_j$ pour revenir au système $(S)$.

Lorsqu'on résout un système linéaire en utilisant des opérations élémentaires (par multiplication à gauche des matrices associées), on peut donc procéder par équivalences.
**Méthode :** en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire $(\mathcal{S})$, on transforme le système linéaire $(\mathcal{S})$ en un système linéaire $(\mathcal{S}')$ qui lui est équivalent et qui est échelonné, c'est-à-dire de la forme (si $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$) :

$$(\mathcal{S}') \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1r}x_r & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2r}x_r & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & a_{rr}x_r & + & \ldots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\ & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & 0 & = & b_n \end{array} \right. .$$

Pour que $(\mathcal{S}')$ soit compatible, il faut que les $n-r$ dernières équations soient vérifiées. On peut alors remonter les lignes du système en introduisant $n-r$ paramètres pour parcourir les solutions.

**Exercice 2.** Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système $(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 4y - z - 3t = 3 \\ 5x - 10y - z - 7t = 5 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

**Exercice 3.** Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système $(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 4y - z - 3t = 3 \\ 5x - 10y - z - 7t = 7 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

**Exercice 4.** Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système $(\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2a - b + 5d = 0 \\ -3a + b - c - 8d = 0 \\ a + c + 3d = 0 \end{cases}$

# 4 Ensemble des matrices carrées

## 4.1 Cas particuliers

**Définition 4.1** (Matrices triangulaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :
- $A$ est une matrice **triangulaire supérieure** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
- $A$ est une matrice **triangulaire inférieure** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
- $A$ est une matrice **diagonale** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.

**Remarque.** Quand $A$ est une matrice diagonale, on note parfois $A = \mathrm{Diag}\,(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

**Remarque.** Les matrices diagonales de type $\lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ sont aussi appelées **matrices scalaires**.

**Exemple.** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice triangulaire supérieure. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Diag}(1,0,3)$ est une matrice diagonale.

**Remarque.** Avec ces définitions, il est immédiat qu'une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. De même pour les matrices triangulaires inférieures.

**Proposition 4.2** (Produit de matrices triangulaires)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.
- Le produit de deux matrices $A = \mathrm{Diag}\,(a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n})$ et $B = \mathrm{Diag}\,(b_{1,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{n,n})$ est la matrice diagonale $AB = \mathrm{Diag}\,(a_{1,1}b_{1,1}, a_{2,2}b_{2,2}, \ldots, a_{n,n}b_{n,n})$.

**Définition 4.3** (Matrices symétriques, antisymétriques)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :
- $A$ est une matrice **symétrique** lorsque $A^\top = A$, c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$.
- $A$ est une matrice **antisymétrique** lorsque $A^\top = -A$, c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de taille $n$.

**Exemple.** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice symétrique. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice antisymétrique.

**Remarque.** Une matrice antisymétrique a nécessairement des zéros sur sa diagonale. En effet, si $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ii} = -a_{ii}$, donc $2a_{ii} = 0$, donc $a_{ii} = 0$.

## 4.2 Calcul de puissances

**Proposition 4.4** (Formule du binôme de Newton)

Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}))^2$ tels que $AB = BA$ et soit $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k},$$

où $A^k$ est le produit matriciel de $A$ par lui-même $k$ fois, avec la convention $A^0 = I_p$.

**Remarque.** Attention à ne pas oublier la condition $AB = BA$, qui ne figurait pas dans la formule pour les réels ! Si $AB \neq BA$, on trouve par exemple en développant $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

**Exercice 5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les puissances $n$-ièmes de : $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

**Exercice 6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $A^n$.

## 4.3 Matrices inversibles

**Définition 4.5** (Matrice inversible)

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** quand il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB = BA = I_n$.
Cette matrice est alors unique et notée $B = A^{-1}$.
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

**Remarque.** On montrera plus tard dans l'année qu'il suffit de vérifier $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ pour garantir l'inversibilité. Cela permet d'alléger les démonstrations.

**Remarque.** Attention : même si multiplier par l'inverse d'une matrice permet de « neutraliser » la multiplication par cette matrice, l'inverse $A^{-1}$ ne doit jamais être écrit sous la forme d'une fraction.

**Proposition 4.6** (Inverse de l'inverse)

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors $A^{-1}$ est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

**Proposition 4.7** (Inverse du produit)

Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Alors $AB$ est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**Remarque.** On en déduit par récurrence que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $A^k \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

**Proposition 4.8** (Inverse de la transposée)

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors $A^\top$ est inversible et $\left(A^\top\right)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

**Exercice 7.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 + A = I_2$. Montrer que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

## 4.4 Calcul d'inverse par résolution de système

**Proposition 4.9** (Résolution de système dans le cas d'une matrice inversible)

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire de forme matricielle $AX = B$. Si la matrice $A$ est inversible, le système $(\mathcal{S})$ possède un unique $n$-uplet solution $X = A^{-1}B$.

**Remarque.** Si le système linéaire n'a pas de solution ou admet plusieurs solutions, la matrice associée n'est donc pas inversible (par contraposée).

**Remarque.** Cette constatation permet d'étudier l'inversibilité d'une matrice par résolution de système linéaire : on fixe un vecteur colonne $B$ quelconque et on résout $AX = B$. Dans le cas inversible, l'expression de la solution permet de déduire la valeur de $A^{-1}$.

**Exercice 8.** Étudier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par résolution de système.

**Proposition 4.10** (Inversibilité d'une matrice triangulaire)

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire. Alors $A$ est inversible si et seulement si elle n'a pas de 0 sur sa diagonale et si elle est inversible, son inverse est aussi triangulaire.

**Remarque.** En particulier, si $D$ est une matrice diagonale et inversible, son inverse est aussi une matrice diagonale.

**Exemple.** La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est inversible puisqu'elle n'a pas de zéro sur la diagonale et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

## 4.5 Calcul d'inverse par Pivot de Gauss sur les matrices

**Proposition 4.11** (Inversibilité des matrices associées aux opérations élémentaires)

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les matrices $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\alpha)$ sont inversibles.

**Proposition 4.12** (Inversibilité des matrices modifiées par opérations élémentaires)

Les opérations élémentaires sur les matrices préservent l'inversibilité.

**Remarque.** En modifiant l'égalité $A = I_n A$ par produits à gauche, on peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de $A$ et $I_n$. Si on parvient à se ramener à une égalité du type $I_n = BA$, on aura montré que $A$ est inversible avec $A^{-1} = B$. Si au contraire les opérations élémentaires transforment $A$ en une matrice (triangulaire) non inversible, on aura montré que $A$ n'est pas inversible.

**Remarque.** Les opérations effectuées sur les matrices sont les mêmes que dans le cas de la résolution par système linéaire, seule la mise en forme change.

**Exercice 9.** Étudier l'inversibilité de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 10.** Étudier l'inversibilité de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.