

Calcul de primitives

Cours de É. Bouchet – PCSI

28 novembre 2025

Table des matières

1	Primitive d’une fonction sur un intervalle	2
1.1	Définition et premières propriétés	2
1.2	Primitives usuelles à connaître	2
2	Intégrale d’une fonction	3
2.1	Généralités sur les intégrales	3
2.2	Quelques calculs	4
3	Méthodes de calcul	5
3.1	Intégration par parties	5
3.2	Changement de variable	6
3.3	Autres techniques classiques	7
3.3.1	Linéariser	7
3.3.2	Utiliser des exponentielles complexes	7
3.3.3	Primitiver $t \mapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$	8

1 Primitive d'une fonction sur un intervalle

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1 (Primitive)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une fonction F est **une primitive** de f sur l'intervalle I lorsque F est dérivable sur I et que $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Remarque. Il n'y a pas unicité, on doit donc dire « une primitive » et pas « la primitive ».

Remarque. La notation F est classique pour noter une primitive de f , mais il faut la définir avant toute utilisation.

Proposition 1.2 (Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit F une primitive de f sur l'intervalle I et G une fonction définie sur I . Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G - F$ est une fonction constante sur I .

Démonstration. On a :

- Si G est une primitive de f sur I , alors G est dérivable sur I et $G - F$ est dérivable sur I par somme de fonctions dérivables. De plus, $\forall x \in I, (G - F)'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Et donc, par propriété de monotonie des fonctions dérivables sur un intervalle, $G - F$ est une fonction constante sur I .
- Réciproquement, on suppose que $G - F$ est une fonction constante sur I . Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que $\forall x \in I, (G - F)(x) = a$. Alors $\forall x \in I, G(x) = F(x) + a$. G est donc dérivable sur I par somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in I, G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. Donc G est une primitive de f sur I .

□

Remarque. Attention, ce résultat (comme beaucoup d'autres du chapitre) n'est valable que pour les intervalles (pas pour les ensembles quelconques).

Proposition 1.3 (Opérations)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit F et G des primitives de f et g sur cet intervalle I . Alors :

- $\alpha F + G$ est une primitive de $\alpha f + g$ sur I .
- $G \times F$ est une primitive de $fG + gF$ sur I .
- $\frac{1}{F}$ est une primitive de $-\frac{f}{F^2}$ sur I (si $\forall x \in I, F(x) \neq 0$).

Démonstration. Pour chaque résultat, il suffit de dériver la primitive annoncée pour vérifier qu'elle convient. □

Remarque. Une primitive d'un produit N'EST PAS le produit de primitives.

1.2 Primitives usuelles à connaître

Ces formules sont valides pour tout intervalle de dérivabilité de la fonction F .

$f(x) =$	$F(x) =$
e^x	e^x
k (constante)	kx
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

$f(x) =$	$F(x) =$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$

$f(x) =$	$F(x) =$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , on obtient par composition les formules suivantes, à connaître également :

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$u'e^u$	e^u	$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u'u^\alpha$ ($\alpha \neq -1$)	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$

Remarque. Soit F une primitive de f . Si $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)$.

Exemple. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 3 \cos(5x+2)$ est $x \mapsto \frac{3}{5} \sin(5x+2)$.

Exemple. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{\lambda x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$.

Cette primitive très classique nous ressortira dans la suite du chapitre.

Exercice 1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \tan(x)$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Solution : $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$. Une primitive est donc la fonction F définie par $\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, $F(x) = -\ln(|\cos(x)|) = -\ln(\cos(x))$ (puisque $\cos$ est strictement positive sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$).

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a} \frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}.$$

Une primitive est donc $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.

2 Intégrale d'une fonction

2.1 Généralités sur les intégrales

Proposition 2.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$, on définit la fonction H par : $\forall x \in I$,

$$H(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors H est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

Démonstration. Admis. □

Remarque. On utilise pour ce résultat la définition d'intégrale vue en Terminale, comme aire algébrique sous la courbe. Une définition plus complète sera proposée au second semestre.

Remarque. Ce résultat montre que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Remarque. Une fonction à valeurs complexes est continue sur un intervalle I lorsque ses parties réelle et imaginaire sont des fonctions continues sur I . Si f est à valeurs complexes, son intégrale est définie par :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_a^x \operatorname{Im}(f(t))dt.$$

Remarque. Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Ses primitives sont donc les fonctions du type $x \mapsto \int_a^x f(t)dt + C$ où $a \in I$ et C est une constante.

Proposition 2.2 (Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I . Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. F et $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sont deux primitives de f , donc il existe $K \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt + K.$$

En particulier, pour $x = a$, on trouve $F(a) = \int_a^a f(t)dt + K = K$, et pour $x = b$, $F(b) = \int_a^b f(t)dt + K$. Ces deux relations donnent bien $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. $\square$

Remarque. Cette formule permet de mémoriser deux relations déjà connues :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt.$$

2.2 Quelques calculs

Exercice 3. Après avoir justifié leur existence, calculer les réels suivants :

1. pour $x > 0$, $J(x) = \int_1^x (1 - \frac{1}{t})(\ln(t) - 2)dt$.

Solution : La fonction $t \mapsto (1 - \frac{1}{t})(\ln(t) - 2)$ est continue entre 1 et x , donc l'intégrale existe, et

$$J(x) = \int_1^x \left(\ln(t) - \frac{\ln(t)}{t} - 2 + \frac{2}{t} \right) dt = \left[t \ln(t) - t - \frac{1}{2}(\ln(t))^2 - 2t + 2 \ln(|t|) \right]_1^x,$$

$$\text{Donc} \quad J(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - 3x + 2 \ln(x) + 3.$$

2. $K = \int_0^1 \sqrt{1-t} dt$.

Solution : La fonction $t \mapsto \sqrt{1-t}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale existe, et

$$K = - \int_0^1 (-1)(1-t)^{\frac{1}{2}} dt = - \left[\frac{(1-t)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = - \left[\frac{2}{3}(1-t)^{3/2} \right]_0^1 = - \left(0 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

3. $L = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du$.

Solution : La fonction $u \mapsto \cos^2(u)$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, donc l'intégrale existe, et

$$L = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right]_0^{-\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(-\pi)}{4} \right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin(0)}{4} \right) = -\frac{\pi}{4}.$$

4. $M = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{t dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

Solution : La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$, donc l'intégrale existe, et

$$M = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{2t dt}{2\sqrt{t^2+1}} = \left[\sqrt{t^2+1} \right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

Proposition 2.3 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a , b et c trois réels de I . Alors

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I (qui existe puisque f est continue). On a :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt.$$

□

Remarque. La formule est vraie sans contrainte d'ordre entre a , b et c .

Exercice 4. Après avoir justifié son existence, calculer $N = \int_{-1}^1 \inf(t, 0)dt$.

Solution : La fonction $t \mapsto \inf(t, 0)$ est continue sur $[-1, 1]$, donc l'intégrale existe, et

$$N = \int_{-1}^0 \inf(t, 0)dt + \int_0^1 \inf(t, 0)dt = \int_{-1}^0 tdt + \int_0^1 0dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2}.$$

3 Méthodes de calcul

3.1 Intégration par parties

Proposition 3.1 (Intégration par parties)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit u et v deux fonctions de classe C^1 entre a et b , à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. u et v sont de classe C^1 entre a et b , donc $t \mapsto u'(t)v(t)$ et $t \mapsto u(t)v'(t)$ sont continues sur l'intervalle associé et les deux intégrales existent. On trouve alors par calcul de primitive :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b.$$

D'où le résultat en passant l'une des intégrales de l'autre côté de l'égalité.

□

Exercice 5. Calculer la valeur de :

$$I = \int_0^1 x^2 \exp(2x)dx.$$

Solution : $x \mapsto x^2 \exp(2x)$ est continue sur $[0, 1]$, donc I est bien définie.

On pose $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \frac{e^{2x}}{2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^{2x}$ on peut donc effectuer une intégration par parties :

$$I = \left[x^2 \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \int_0^1 x e^{2x} dx.$$

Les fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \frac{e^{2x}}{2}$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec $f'(x) = 1$ et $g'(x) = e^{2x}$ on peut donc effectuer une nouvelle intégration par parties :

$$I = \frac{e^2}{2} - \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + 0 + \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

Exercice 6. Déterminer la primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

Solution : $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc cette primitive existe, et vaut $x \mapsto \int_1^x \ln(t)dt$. Il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale. Soit $x > 0$, $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe C^1 entre 1 et x , avec $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$, une intégration par parties donne donc :

$$\int_1^x \ln(t)dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - (x - 1) = x \ln(x) - x + 1.$$

La primitive recherchée est donc $x \mapsto x \ln(x) - x + 1$.

Remarque. Quelques conseils sur les choix de fonction à dériver ou primitiver pour une intégration par parties :

- S'il y a une fonction qu'on ne sait pas primitiver, c'est qu'il faut la dériver.
- On a souvent envie de dériver $\ln$ car sa dérivée est beaucoup plus simple que ses primitives.
- Si on n'est pas dans un des cas précédents, on a souvent envie de dériver les polynômes.

3.2 Changement de variable

Proposition 3.2 (Changement de variable)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u : t \mapsto u(t)$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I . Alors

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t)dt.$$

Démonstration. La fonction f est continue sur I , donc admet une primitive F sur cet intervalle. Soit $h = F \circ u$. La fonction h est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ (par composée de fonctions de classe C^1), et pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$h'(t) = F'(u(t))u'(t) = f(u(t))u'(t).$$

Cette fonction étant continue sur $[\alpha, \beta]$, on peut passer à l'intégrale et on trouve :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt = h(\beta) - h(\alpha) = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx.$$

□

Remarque. Ce changement de variable se note $x = u(t)$ et on s'autorise la notation $dx = u'(t)dt$ pour interpréter la formule :

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{f(u(t))}_x \underbrace{u'(t)dt}_{dx}.$$

Exercice 7. En utilisant le changement de variable $t = x - 4$, calculer la valeur de :

$$J = \int_0^4 \exp(x - 4)dx.$$

Solution : $x \mapsto \exp(x - 4)$ est continue sur $[0, 4]$, donc J existe. $x \mapsto x - 4$ est de classe C^1 sur $[0, 4]$, on peut donc poser le changement de variables $t = x - 4$, avec $dt = dx$:

$$J = \int_{-4}^0 \exp(t)dt = [\exp(t)]_{-4}^0 = 1 - \exp(-4).$$

Exercice 8. En utilisant le changement de variable $t = \cos(x)$, calculer la valeur de :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx.$$

Solution : $x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est continue sur $[0, \pi]$, donc I existe. $x \mapsto \cos(x)$ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$, on peut donc poser le changement de variables $t = \cos(x)$ avec $dt = -\sin(x)dx$:

$$I = \int_0^\pi \frac{-1}{1+\cos^2(x)}(-\sin(x))dx = \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{1+t^2}dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Si u est strictement monotone sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, alors u réalise une bijection de $[\alpha, \beta]$ sur un intervalle $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt.$$

Exercice 9. En utilisant le changement de variable $x = \cos(t)$, calculer la valeur de :

$$K = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Solution : $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0, 1]$, donc K existe. $t \mapsto \cos(t)$ est de classe C^1 et bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, 1]$. On peut donc poser le changement de variables $x = \cos(t)$ avec $dx = -\sin(t)dt$ (en utilisant des antécédents pour les bornes) :

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2(t)}(-\sin(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t)| \sin(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt,$$

car $\sin$ est positif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Il ne reste plus qu'à linéariser l'expression pour déterminer une primitive :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

(Dans le cas de cet exemple, on aurait aussi pu poser $t = \arccos(x)$, mais la relation $dt = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ aurait été beaucoup plus difficile à manipuler.)

3.3 Autres techniques classiques

3.3.1 Linéariser

Exercice 10. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \sin^5(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : On utilise les formules d'Euler et du binôme de Newton : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sin^5(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^5 = \frac{e^{5it} - 5e^{3it} + 10e^{it} - 10e^{-it} + 5e^{-3it} - e^{-5it}}{2^5 i} = \frac{\sin(5t) - 5\sin(3t) + 10\sin(t)}{16}.$$

Chacun de ces termes est facilement primitivable, ce qui permet de proposer comme primitive la fonction F définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \frac{-\cos(5t)}{5 \times 16} - 5 \frac{-\cos(3t)}{3 \times 16} + 10 \frac{-\cos(t)}{16} = -\frac{\cos(5t)}{80} + \frac{5\cos(3t)}{48} - \frac{5\cos(t)}{8}.$$

3.3.2 Utiliser des exponentielles complexes

Exercice 11. Déterminer une primitive de $g : t \mapsto e^{2t} \cos(5t)$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : On remarque que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = e^{2t} \cos(5t) = e^{2t} \operatorname{Re}(e^{5it}) = \operatorname{Re}(e^{2t+5it}) = \operatorname{Re}(e^{t(2+5i)}).$$

Une primitive complexe de $t \mapsto e^{t(2+5i)}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{1}{2+5i} e^{t(2+5i)}$. Or,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2+5i} e^{t(2+5i)} = \frac{2-5i}{4+25} e^{2t} (\cos(5t) + i \sin(5t)) = \frac{e^{2t}}{29} (2\cos(5t) + 5\sin(5t) + 2i \sin(5t) - 5i \cos(5t)).$$

Cela permet de proposer comme primitive pour g sur $\mathbb{R}$ la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2+5i} e^{t(2+5i)} \right) = \frac{e^{2t}}{29} (2\cos(5t) + 5\sin(5t)).$$

3.3.3 Primitiver $t \mapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$

Exercice 12. Déterminer une primitive de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$ sur un intervalle I (à déterminer) où g est bien définie.

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, donc on peut poser $I =] - \infty, -1[$ ou $I =] - 1, +\infty[$. On obtient alors :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Une primitive sur I est donc $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$.

Exercice 13. Déterminer une primitive de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{2t^2 - 6t + 4}$ sur un intervalle I (à déterminer) où f est bien définie.

Solution : Soit $t \in \mathbb{R}$, le discriminant de $2t^2 - 6t + 4$ vaut $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$, ce qui fournit deux racines $\frac{6+2}{4} = 2$ et $\frac{6-2}{4} = 1$.

On peut donc poser $I =] - \infty, 1[$ ou $I =]1, 2[$ ou $I =]2, +\infty[$ et obtenir :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \frac{1}{2t^2 - 6t + 4} = \frac{1}{2(t-1)(t-2)}.$$

Décomposons en éléments simples : on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$,

$$\frac{1}{2(t-1)(t-2)} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t-2}.$$

Multiplier par $t-2$ puis faire tendre t vers 2 donne $\beta = \frac{1}{2}$. Multiplier par $t-1$ puis faire tendre t vers 1 donne $\alpha = -\frac{1}{2}$. Donc :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{t-2}.$$

Une primitive sur I est donc $t \mapsto -\frac{1}{2} \ln(|t-1|) + \frac{1}{2} \ln(|t-2|)$.

Exercice 14. Déterminer une primitive de la fonction $h : u \mapsto \frac{1}{u^2 + 2u + 4}$ sur un intervalle I (à déterminer) où h est bien définie.

Solution : Soit $u \in \mathbb{R}$, le discriminant de $u^2 + 2u + 4$ vaut $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$, on peut donc poser $I = \mathbb{R}$. On obtient alors, en passant sous forme canonique :

$$\forall u \in I, \quad h(u) = \frac{1}{u^2 + 2u + 4} = \frac{1}{(u+1)^2 + 3} = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

Une primitive sur I est donc $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{u+1}{\sqrt{3}}\right)$.