Limites et continuité

Cours de É. Bouchet – PCSI

16 octobre 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, les fonctions f considérées sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Elle sont toutes supposées à valeurs réelles (sauf dans la dernière section).

1 Notion de voisinage

Définition 1.1 (Voisinage d'un point)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un **voisinage** de a est un intervalle ouvert centré en a.
On dit qu'une propriété portant sur une fonction f est **vraie au voisinage de** a lorsqu'elle est vraie sur l'intersection de I avec un voisinage de a.

Remarque. Un voisinage de a est donc un intervalle de type $]a-\eta, a+\eta[$, avec $\eta > 0$.

Exemple. $]-1, 1[$ et $]-\pi, \pi[$ sont des voisinages de 0.

Définition 1.2 (Voisinage de l'infini)

Un **voisinage** de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est un intervalle du type $]B, +\infty[$ (resp. $]-\infty, B[$), où $B \in \mathbb{R}$.
On dit qu'une propriété portant sur une fonction f est **vraie au voisinage de** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsqu'elle est vraie sur l'intersection de I avec un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple. La fonction logarithme est positive sur $]1, +\infty[$, donc elle est positive au voisinage de $+\infty$. Elle est négative sur $]0, 1[=]-1, 1[\cap \mathbb{R}_+^*$, donc elle est négative au voisinage de 0.

2 Limite d'une fonction en un point

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Limite finie/infinie de f en a)

Soit a un réel appartenant à I ou une extrémité de I, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que :

— f **admet** ℓ **comme limite au point** a si pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de a.
C'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

— f **admet** $+\infty$ **comme limite au point** a si pour tout $M \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant M$ au voisinage de a.
C'est-à-dire : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \geqslant M$.

Remarque. Tant qu'on choisit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, le choix de $[a-\eta, a+\eta]$ ou $]a-\eta, a+\eta[$ n'a pas d'importance pour la définition, tout comme le choix d'inégalités strictes ou larges pour f.

Définition 2.2 (Limite finie/infinie de f en $+\infty$)

On suppose que I admet $+\infty$ comme extrémité. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que :

— f **admet** ℓ **comme limite en** $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de $+\infty$.
C'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in I$ tel que $\forall x \geqslant A$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

— f **admet** $+\infty$ **comme limite en** $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant M$ au voisinage de $+\infty$.
C'est-à-dire : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in I$ tel que $\forall x \geqslant A$, $f(x) \geqslant M$.

Remarque. Ces définitions s'adaptent au cas $-\infty$ en remplaçant $f(x) \geqslant M$ par $f(x) \leqslant M$, ou $x \geqslant A$ par $x \leqslant A$.

Remarque. En reformulant en terme de voisinage, si α et β sont des réel ou $\pm\infty$, f admet comme limite β en α si pour tout voisinage V_β de β, il existe un voisinage V_α de α tel que $\forall x \in V_\alpha \cap I$, $f(x) \in V_\beta$.

Remarque. Si α et β sont des réels ou $\pm\infty$, on note $f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} \beta$ ou $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ pour indiquer que f admet β comme limite en α.

Proposition 2.3 (Unicité de la limite)

Soit α un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe, alors cette limite est unique.

Proposition 2.4 (Limite en un point de l'ensemble de définition)

Soit a un réel. Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposition 2.5 (Limite en un point et bornes au voisinage)

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et f une fonction définie au voisinage de α. Si la fonction f admet une limite finie en α, alors f est bornée au voisinage de α.

Définition 2.6 (Limite à droite, limite à gauche)

Soit a un point de I ou une de ses extrémités, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

— f admet ℓ comme **limite à droite** en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]a, a + \eta] \cap I, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

— f admet ℓ comme **limite à gauche** en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a - \eta, a[\cap I, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Remarque. On note $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ pour la limite à droite, $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ pour la limite à gauche.

Remarque. Il n'est pas nécessaire que f soit définie en a pour définir $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

Proposition 2.7 (Lien entre limite, limite à droite et limite à gauche)

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite ℓ en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$. Si $a \in I$, il faut de plus ajouter la condition $\ell = f(a)$.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. La fonction admet une limite à droite en 0, qui vaut 1, et une limite à gauche en 0, qui vaut 0. Elle n'admet par contre pas de limite en 0.

2.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 2.8 (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction)

Soit α et ℓ des réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$. On a l'équivalence suivante :

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell \iff \text{Pour toute suite réelle } u \text{ à valeurs dans } I \text{ et telle que } \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha, \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell.$$

Exemple. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Remarque. Cette caractérisation peut aussi être utilisée pour montrer une non-limite.

Exercice 1. Montrer que sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

2.3 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions. Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux réels. On suppose dans cette section que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ existe et que $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ existe.

$\lim_\alpha g$ ＼ $\lim_\alpha f$: $\lim_\alpha (f+g)$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

$\lim_\alpha \lvert g\rvert$ ＼ $\lim_\alpha \lvert f\rvert$: $\lim_\alpha \lvert fg\rvert$	$\ell_1>0$	0	$+\infty$
$\ell_2>0$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$
0	0	0	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$

Remarque. Dans le cas du produit, on applique ensuite les règles de signes pour trouver des limites négatives.

Proposition 2.9 (Limite de l'inverse)

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell\neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\ell}$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} |f(x)|=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}=0$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$ et $f(x)>0$ au voisinage de α, alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$ et $f(x)<0$ au voisinage de α, alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.

Remarque. Les limites pour le quotient s'obtiennent ensuite à partir de celles du produit et de l'inverse.

Proposition 2.10 (Limite d'une fonction composée)

Soit α , ℓ_1 et ℓ_2 des réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell_1$ et $\lim\limits_{x\to\ell_1} g(x)=\ell_2$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g\circ f(x)=\ell_2$.

2.4 Limites et relation d'ordre

Proposition 2.11 (Passage à la limite dans une inégalité)

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions réelles et soit ℓ_1 et ℓ_2 deux réels. On suppose que pour x au voisinage de α, $f(x)\leqslant g(x)$. Si f admet pour limite ℓ_1 en α et g admet pour limite ℓ_2 en α alors $\ell_1\leqslant\ell_2$.

Remarque. En particulier, si $f(x)\geqslant 0$ au voisinage de α et si f admet une limite ℓ en α alors $\ell\geqslant 0$.

Remarque. Attention, ce résultat devient faux si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

Proposition 2.12 (Théorème d'encadrement)

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, soit f, g, h trois fonctions réelles et soit ℓ un réel. On suppose qu'au voisinage de α, $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$, et que f et h admettent la même limite ℓ en α. Alors g admet également pour limite ℓ en α.

Remarque. Ce théorème fournit **l'existence et la valeur** de la limite.

Remarque. Comme dans le cas des suites, on en déduit le corollaire suivant : si f est une fonction bornée au voisinage de α et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha}(fg)(x)=0$.

Exercice 2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x\to\frac{\cos(x)}{x}$.

Remarque. Ce résultat s'étend au cas des limites infinies avec les théorèmes de comparaison :
- Si au voisinage de α, $f(x)\leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=+\infty$.
- Si au voisinage de α, $f(x)\leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$.

2.5 Théorème de la limite monotone

Proposition 2.13 (Théorème de la limite monotone, cas croissant)

Soit a et b des réels tels que $a < b$, et f une fonction croissante sur l'intervalle $]a, b[$. Alors pour tout point x de $]a, b[$, f admet une limite à gauche et à droite en x, et ces limites sont finies. De plus :

— $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe et vaut $\begin{cases} \sup_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est majorée sur }]a,b[, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

— $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et vaut $\begin{cases} \inf_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est minorée sur }]a,b[, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarque. Ce résultat reste vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Remarque. C'est un des rares résultats de ce chapitre qui ne nécessite pas la continuité de f.

Remarque. On obtient de même le comportement quand f est décroissante sur $]a, b[$:

— Pour tout point x de $]a, b[$, f admet une limite à gauche et à droite en x, et ces limites sont finies.

— $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existe et vaut $\begin{cases} \inf_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est minorée sur }]a,b[, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

— $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et vaut $\begin{cases} \sup_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est majorée sur }]a,b[, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$

Exemple. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des limites à droite et à gauche finies en tout point réel.

3 Continuité en un point

Définition 3.1 (Continuité)

Soit a un point de l'intervalle I. Une fonction f définie de I dans $\mathbb{R}$ est dite :

— **continue à droite** en a si $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$,

— **continue à gauche** en a si $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$,

— **continue** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque. Les propriétés des limites donnent directement que :

— lorsque a n'est pas une extrémité de I, la continuité simple équivaut à la continuité à droite et à gauche.

— si f et g sont deux fonctions continues en $a \in I$, les fonctions $(f + g)$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$), fg, $|f|$ et $\frac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a.

— si f et h sont deux fonctions telles que la composée $h \circ f$ soit correctement définie au voisinage de a, si f est continue en a et si h est continue en $f(a)$, alors $h \circ f$ est continue en a.

Proposition 3.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $a \in I$, alors : f continue en $a \iff \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Remarque. On retrouve le théorème du point fixe établi dans le chapitre sur les suites : si une suite u définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un réel ℓ, et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Définition 3.3 (Prolongement par continuité)

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus I$. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a, on dit que f est **prolongeable par continuité** en a. La fonction définie sur $I \cup \{a\}$ par $x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases}$ est appelée **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$, f est prolongeable par continuité en 0, et le prolongement est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$

4 Fonctions continues sur un intervalle

4.1 Définition

Définition 4.1 (Fonction continue sur un intervalle)

On dit que f est **continue sur l'intervalle** I lorsque f est continue en tout point de l'intervalle I.

Exemple. Les fonctions polynômes, exp, sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

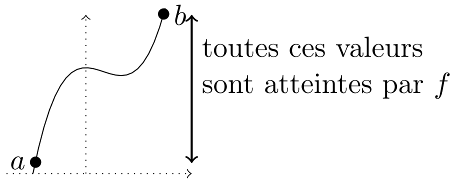
Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer sa continuité sur $\mathbb{R}$.

4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 4.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Remarque. Ce théorème signifie que si f est continue sur un intervalle I et si f prend deux valeurs distinctes, elle atteint toutes les valeurs (intermédiaires...) comprises entre ces deux réels.



Proposition 4.3 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exercice 4. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Montrer que f admet un point fixe (une valeur z de son ensemble de définition telle que $f(z) = z$).

4.3 Théorème des bornes atteintes

Proposition 4.4 (Théorème des bornes atteintes)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Remarque. Cela signifie que f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$. Donc $m = \min_{[a,b]} f$ et $M = \max_{[a,b]} f$ existent et en couplant avec le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exercice 5. Montrer sans étude de variations que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

4.4 Théorème de la bijection

Proposition 4.5 (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$. Sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f.

Remarque. En particulier, si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et si $b \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution sur I.
Énoncé sous cette forme, ce théorème s'appelle aussi « théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone ».

Exercice 6. Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[2, +\infty[$.

Remarque. Le théorème de la bijection est un outil puissant pour définir des suites de manière implicite.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite à valeurs dans $[0,1]$ définie par la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 1$.
2. Montrer que la suite u converge.

5 Fonctions à valeurs complexes

Dans cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque. Comme dans le cas des suites, le symbole $\leqslant$ n'a pas de sens entre deux nombres complexes. Les notions de fonction croissante/décroissante, fonction divergente vers $\pm\infty$, fonction majorée/minorée ne se généralisent donc pas dans $\mathbb{C}$. On n'a donc pas de théorème des gendarmes, pas de convergence monotone, pas de théorème de la bijection.

Définition 5.1 (Fonction bornée)

Soit $\alpha \in I$, ou une de ses extrémités. On dit que la fonction f est **bornée** au voisinage de α s'il existe un voisinage V_α de α et une constante $M \geqslant 0$ tels que $\forall x \in V_\alpha \cap I$, $|f(x)| \leqslant M$.

Remarque. f est bornée au voisinage de α si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées au voisinage de α.

Définition 5.2 (Limite)

Soit $\alpha \in I$, ou une de ses extrémités et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la fonction f admet ℓ comme **limite** en α si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_α de α tel que pour tout $x \in V_\alpha \cap I$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Remarque. $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \to \alpha} \mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim_{x \to \alpha} \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Remarque. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, une fonction à valeurs complexes qui admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en α est nécessairement bornée au voisinage de α. On dispose également des opérations usuelles sur les limites finies.

Définition 5.3 (Continuité)

Soit $a \in I$. On dit que f est **continue** en a lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque. f est continue en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ est continue en a et $\mathrm{Im}(f)$ est continue en a.

Remarque. Attention, le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus valable dans le cas des fonctions à valeurs complexes. Par exemple, la fonction $f : t \mapsto e^{it}$ est continue sur $[0, \pi]$ et vérifie $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$ sans jamais s'annuler.