Limites et continuité

Exercice 1 (★). Calculer les limites (lorsqu'elles existent) en $x \to 0$ et en $x \to +\infty$ de :

1. $u_1(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1}$
2. $u_2(x) = \sin(x)e^{-x}$
3. $u_3(x) = x^3\cos(x)$
4. $u_4(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2}$

Résultat attendu :

1. 0 en 0, $+\infty$ en $+\infty$
2. 0 en 0, 0 en $+\infty$
3. 0 en 0, rien en $+\infty$
4. rien en 0, 0 en $+\infty$

Exercice 2 (★★). Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+|x|}{2x^2-|x|}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-16}{x^3-8}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{\pi x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{1+2x}}$

Résultat attendu :

1. -1
2. -1
3. $\dfrac{4}{3}$
4. pas de limite
5. $\dfrac{1}{\pi}$
6. $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$
7. pas de limite
8. $\dfrac{-1}{4}$

Exercice 3 (★★). À l'aide de changements de variables et des formules de composition déterminer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{s\to 1^+} \frac{(s-1)\ln(s-1)}{s^2}$
2. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^2 e^{\frac{1}{t}}$

Résultat attendu :

1. 0 en posant $u = s-1$
2. $+\infty$ en posant $x = \dfrac{1}{t}$

Exercice 4 (★). Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2+1}$ pour $x > -1$ et $f(x) = e^{x+1}$ pour $x \leqslant -1$. Est-elle continue en -1 ?
Résultat attendu : La limite à droite vaut -1 et la limite à gauche vaut 1, donc f n'est pas continue en -1.

Exercice 5 (★). Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1+\ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)-x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Résultat attendu : Les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (★★). Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $\forall x \in]-1,4[,\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \lfloor x\rfloor \text{ est impair} \\ x & \text{si } \lfloor x\rfloor \text{ est pair} \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\lfloor x\rfloor$

Résultat attendu :

1. f est continue sur $]-1,4[\setminus\{2,3\}$
2. f est continue sur $\{0\} \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$

Exercice 7 (★). Soit u et v deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\begin{cases} u(0)=0 \\ v(0)=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(1)=1 \\ v(1)=0 \end{cases}$.
Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $u(x) = v(x)$.
Résultat attendu : On montre par théorème des valeurs intermédiaires que $x \mapsto u(x)-v(x)$ atteint 0.

Exercice 8 (★). Montrer que l'équation $\ln(x) = x^2-3$ admet au moins deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
Résultat attendu : On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x)-x^2+3$, pour laquelle on trouve deux annulations grâce à deux applications distinctes du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 9 (★★). Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.
Résultat attendu : On montre par théorème des valeurs intermédiaires que $x \mapsto f(x)-x$ atteint 0.

Exercice 10 (★★★). Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,1[$.
Montrer que g admet un point fixe.
Résultat attendu : On montre par théorème des valeurs intermédiaires que $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$ atteint 1.

Exercice 11 (★★★)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On appelle point fixe de f tout réel x tel que $f(x) = x$. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.
Résultat attendu : Le sens direct est immédiat, la réciproque se montre en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction judicieusement choisie.

Exercice 12 (★)**.** Montrer (sans étude de fonction) que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t\ln(t)}{1+t^2} \end{array}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
Résultat attendu : On utilise des valeurs particulières de limites et le théorème des bornes atteintes appliqué sur un segment judicieusement choisi.

Exercice 13 (★)**.** Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Résultat attendu : On applique le théorème des bornes atteintes à f sur $[0, T]$, puis on utilise la périodicité pour étendre le résultat à $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (★★)**.** Montrer (sans étude de fonction) que $g : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t\sin(t-1)}{t-1} + \dfrac{t^2\cos(t)}{e^t} \end{array}$ est bornée sur $]1, +\infty[$.
Résultat attendu : On utilise des valeurs particulières de limites et le théorème des bornes atteintes appliqué sur un segment judicieusement choisi, en étudiant séparément les deux termes de la somme.

Exercice 15 (★★★)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
Résultat attendu : On raisonne par l'absurde en supposant que f atteint au moins deux valeurs distinctes, puis au choix en utilisant la définition de la limite ou la caractérisation séquentielle des suites.

Exercice 16 (★)**.** Montrer que l'équation $e^{-x^2} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
Résultat attendu : On applique le théorème de la bijection à la fonction $x \mapsto e^{-x^2} - x$ pour déterminer le nombre d'antécédents de 0.

Exercice 17 (★)**.** Le but de l'exercice est d'étudier pour tout $n \geqslant 2$ les solutions de l'équation $e^x = x + n$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) et leur comportement lorsque $n \to +\infty$.

1. Réaliser une étude complète de la fonction $f : x \mapsto e^x - x$ (ensemble de définition, tableau de variation, limites, allure du graphe).
2. On fixe un entier naturel $n \geqslant 2$. Déduire de la question précédente que l'équation $e^x = x + n$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, solutions que l'on note x_n et y_n (avec $x_n < y_n$).
3. (★★) Déterminer la limite des suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$.
4. (★★) Démontrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant 2}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ sont monotones.

Résultat attendu :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Cela donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On applique deux fois le théorème de la bijection (sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$).
3. On utilise l'égalité $e^{x_n} - n = x_n$ et une majoration bien choisie pour montrer que x diverge vers $-\infty$, puis l'égalité $e^{y_n} = y_n + n$ et une minoration bien choisie pour montrer que y diverge vers $+\infty$.
4. On utilise la monotonie de $(f_{|\mathbb{R}_-^*})^{-1}$ et de $(f_{|\mathbb{R}_+^*})^{-1}$ pour montrer que y est croissante et x décroissante.

Exercice 18 (Type DS)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux uniques réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$, qui vérifient $0 < u_n < n < v_n$.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3. Étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $1 < u_n < e$.

   (b) Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   Indication : passer à la limite dans une égalité bien choisie.

Résultat attendu :

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$. Cette dérivée est strictement positive sur $]n, +\infty[$ et strictement négative sur $]0, n[$, f_n est donc strictement croissante sur $]n, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, n[$. L'étude des limites (par croissances comparées en $+\infty$ avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1 - n\frac{\ln(x)}{x})$) permet de compléter le tableau :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Soit $n \geqslant 3$. D'après 1.(a),

   — f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, n[$, le théorème de la bijection nous donne donc que f_n réalise une bijection de $]0, n[$ dans $]f_n(n), +\infty[$.

   — f_n est continue et strictement croissante sur $]n, +\infty[$, le théorème de la bijection nous donne donc que f_n réalise une bijection de $]n, +\infty[$ dans $]f_n(n), +\infty[$.

   Comme $n \geqslant 3$, alors $n > e$, donc $\ln(n) > \ln(e) = 1$ par croissance stricte de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $f_n(n) = n(1 - \ln(n)) < 0$. Donc $0 \in]f_n(n), +\infty[$, et donc 0 admet exactement deux antécédents par f_n : un dans $]0, n[$, que l'on note u_n, et un dans $]n, +\infty[$, que l'on note v_n. D'où le résultat.

2. Par la question 1.(b), $\forall n \geqslant 3$, $v_n \geqslant n$. Donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. (a) Soit $n \geqslant 3$. Alors $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(e) = e - n < 0$. Comme f_n est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous donne que f_n s'annule entre 1 et e. Or $e < n$, et d'après 1.(b), le seul point où f_n s'annule sur $]0, n[$ est u_n. Donc $1 < u_n < e$.

   <u>Variante :</u> comme $f(u_n) = 0$, $u_n = n\ln(u_n)$. Or $0 < u_n < n$, donc $0 < n\ln(u_n) < n$. Diviser par $n > 0$ puis composer par l'exponentielle (strictement croissante sur $\mathbb{R}$) donne $1 < u_n < e$.

   <u>Variante 2 :</u> f_n est bijective strictement décroissante de $]0, n[$ dans $]f_n(n), +\infty[$, elle admet donc une réciproque strictement décroissante qu'on notera h (on évite ici d'utiliser la notation f_n^{-1} parce que f_n définit deux bijections différentes en fonction des intervalles de départ). Comme $1 > 0 > e - n$, composer par h donne $1 < u_n < e$.

   (b) Soit $n \geqslant 3$,

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) + \ln(u_{n+1}) = f_{n+1}(u_{n+1}) + \ln(u_{n+1}).$$

   Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, donc $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.

   On a montré en a) que $u_{n+1} > 1$, donc $\ln(u_{n+1}) \geqslant 0$, donc $f_n(u_{n+1}) \geqslant f_n(u_n)$.

   On voudrait maintenant composer par une réciproque de f_n. Comme u_n et u_{n+1} sont dans $]1, e[$ par a), ils sont dans $]0, n[$. f_n est strictement décroissante sur cet intervalle, sa réciproque h est donc de même monotonie. Donc $h(f_n(u_{n+1})) \leqslant h(f_n(u_n))$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

   (c) $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et minorée (par 1), donc elle converge.

   (d) Soit $n \geqslant 3$. On sait que $f_n(u_n) = 0$, et $n \neq 0$, donc $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$. Comme u converge vers un réel et $(\frac{1}{n})$ converge vers 0, on trouve par produit que $(\ln(u_n))$ converge vers 0. En composant par l'exponentielle, continue en 0, on trouve que (u_n) converge vers $e^0 = 1$.