Matrices et systèmes linéaires

Cours de É. Bouchet – PCSI

4 décembre 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, n, p, q désignent des éléments de $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appelle scalaires les éléments de $\mathbb{K}$, en prévision des chapitres du second semestre.

1 Ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Matrice)

Une **matrice** à n lignes et p colonnes (ou matrice de taille $n \times p$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. Si A est une telle matrice, on note a_{ij} le terme de la i-ième ligne et j-ième colonne :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1p} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{ip} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque. On écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, ou plus simplement $A = (a_{ij})$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque. Quelques cas particuliers importants :
— si $p = n$, A est appelée **matrice carrée** d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— si $n = 1$, A est appelée **matrice ligne ou vecteur ligne**.
— si $p = 1$, A est appelée **matrice colonne ou vecteur colonne**.
— si $n = 1$ et $p = 1$, A est souvent confondue avec le nombre $a_{11} \in \mathbb{K}$.

Définition 1.2 (Égalité de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que les deux matrices A et B sont égales et on note $A = B$ lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} = b_{ij}$.

1.2 Addition de matrices et multiplication par un scalaire

Définition 1.3 (Addition de matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de A et B est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $A + B = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ avec pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple. On a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque. Soit A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'addition est une opération interne dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et :

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$,
2. $A + B = B + A$,
3. $A + 0 = A = 0 + A$ en notant 0 la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls.
4. $A + (-A) = 0 = (-A) + A$ en notant $-A$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le terme de la i-ième ligne et j-ième colonne est $-a_{ij}$.

Définition 1.4 (Multiplication d'une matrice par un scalaire)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La multiplication externe du scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ par la matrice A, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\alpha A = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ avec pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = \alpha \times a_{ij}$.

Exemple. On a : $2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque. Dans une multiplication entre un scalaire et une matrice, le scalaire doit toujours être écrit à gauche de la matrice.

Remarque. Soit α et β des éléments de $\mathbb{K}$, et A et B des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La multiplication d'un scalaire par une matrice est définie de $\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et vérifie :

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$,
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$,
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $1A = A$.

1.3 Matrices $E_{i,j}$

Définition 1.5 (Matrice $E_{i,j}$)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On appelle $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf un 1 à la i-ème ligne et j-ème colonne.

Exemple. Dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. La notation $E_{i,j}$ ne précise pas la taille de la matrice, juste la position du coefficient non nul. Dans les exercices, on se repose donc sur le contexte pour déterminer le nombre de lignes et de colonnes.

Proposition 1.6 (Décomposition selon les $E_{i,j}$)

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices $E_{i,j}$.

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a alors : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{i,j}$. □

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 1E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{2,1} + 4E_{2,2} + 5E_{3,1} + 6E_{3,2}$.

1.4 Produit matriciel

Définition 1.7 (Produit de matrices)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices. On appelle produit des matrices A et B et on note AB la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ qui vérifie : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

Exercice 1. Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

<u>Solution :</u> $AB \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$. Le calcul se fait comme suit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ \boxed{0} & -5 \\ \boxed{-3} & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{4} \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ** & ** \\ \boxed{**} & ** \\ ** & ** \\ ** & ** \end{pmatrix} \end{array}$$

On trouve : $AB = \begin{pmatrix} -15 & 14 \\ -12 & 17 \\ -8 & 26 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$.

Remarque. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le produit matriciel AB correspond à la succession des produit de la matrice A par les vecteurs colonnes de la matrice B.

Remarque. Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A, et les coefficients de la combinaison linéaire sont les coefficients de X.

Exemple. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. On a : $AX = \begin{pmatrix} x_1a_{11}+x_2a_{12} \\ x_1a_{21}+x_2a_{22} \\ x_1a_{31}+x_2a_{32} \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$.

Proposition 1.8 (Propriétés du produit matriciel)

Le produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A + B)\,C = AC + BC$,
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))^2$, $A\,(B + C) = AB + AC$,
3. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $A\,(\alpha.B) = \alpha.\,(AB) = (\alpha.A)\,B$,
4. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)\,C = A\,(BC)$,

Démonstration. On va montrer le premier résultat, les autres se montrent de la même façon. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$. Alors le terme en $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$ de $(A + B)\,C$ est par définition de la somme et du produit matriciel :

$$\sum_{k=1}^{p}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}.$$

Or, ce nouveau terme est le terme en $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$ de $AC + BC$. D'où le résultat. $\square$

Remarque. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, les deux produits AB et BA sont possibles. ATTENTION : dans le cas général, $AB \neq BA$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Notons au passage qu'on peut donc trouver A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$.

Définition 1.9 (Symbole de Kronecker)

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on définit la notation suivante : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Proposition 1.10 (Produit de matrices $E_{i,j}$)

Soit $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!] \times [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$, alors $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Remarque. Dans ce produit matriciel, on a $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $E_{i,l} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Le coefficient de la r-ième ligne et s-ième colonne de $E_{i,j}$ est $\delta_{i,r}\delta_{j,s}$.
On pose $E_{i,j} \times E_{k,l} = (a_{rs})_{\substack{1\leqslant r\leqslant n \\ 1\leqslant s\leqslant q}}$ et $\delta_{j,k}E_{i,l} = (b_{rs})_{\substack{1\leqslant r\leqslant n \\ 1\leqslant s\leqslant q}}$. Par formule du produit matriciel, on obtient pour $(r, s) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$:

$$a_{rs} = \sum_{t=1}^{p}(\delta_{i,r}\delta_{j,t})(\delta_{k,t}\delta_{l,s}) = \delta_{i,r}\delta_{l,s}\sum_{t=1}^{p}\delta_{j,t}\delta_{k,t} = \delta_{i,r}\delta_{l,s}(0 + \delta_{j,k} \times 1 + 0) = b_{rs}.$$

D'où le résultat annoncé. $\square$

Exemple. Quand les produits matriciels sont compatibles, on trouve $E_{1,1} \times E_{1,2} = E_{1,2}$, $E_{1,1} \times E_{2,1} = 0$ (la matrice nulle), $E_{1,3} \times E_{3,2} = E_{1,2}$.

1.5 Transposée

Définition 1.11 (Transposée)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **matrice transposée** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée $A^\top$ qui vérifie $A^\top = (a_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

Exemple. $\left(\begin{smallmatrix}1&2&1\\0&3&5\end{smallmatrix}\right)^\top = \begin{pmatrix}1&0\\2&3\\1&5\end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)^\top = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)$.

Proposition 1.12 (Transposée de la somme)

Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, on a $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

Démonstration. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$. On a alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ par définition de la somme de deux matrices. D'où

$$(A+B)^\top = (a_{ji} + b_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = A^\top + B^\top.$$

$\square$

Proposition 1.13 (Transposée du produit)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Démonstration. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ $A^\top = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ $B^\top = (b'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant p}}$ $AB = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}$ $(AB)^\top = (c'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B^\top A^\top = (d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
Par propriétés de la transposée, pour les valeurs de i et j pour lesquelles les coefficients sont bien définis, $a'_{ij} = a_{ji}$, $b'_{ij} = b_{ji}$ et $c'_{ij} = c_{ji}$. La formule du produit matriciel donne alors, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$,

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik}a'_{kj} = d_{ij}.$$

Donc pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, $c'_{ij} = d_{ij}$, c'est-à-dire $(AB)^\top = B^\top A^\top$. $\square$

2 Opérations élémentaires

2.1 Matrice identité

Définition 2.1 (Matrice identité)

On appelle **matrice identité** de taille n la matrice carrée $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Exemple. On a $I_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Proposition 2.2 (Produits avec la matrice identité)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_nA = A = AI_p$.

Démonstration. On montre la première égalité, la deuxième se montre de la même façon. On pose $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $I_nA = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on trouve par formule du produit matriciel :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} a_{kj} = 0 + 1 \times a_{ij} + 0 = a_{ij}.$$

□

2.2 Opérations élémentaires et matrices associées

Définition 2.3 (Opérations élémentaires)

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice les opérations suivantes :

1. échange de deux lignes L_i et L_j avec $i \neq j$, codifiée : $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. multiplication de la ligne L_i par $\lambda \in \mathbb{K}^*$, codifiée : $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.
3. addition de la ligne L_i et d'un multiple de L_j avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, codifiée : $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.

Définition 2.4 (Matrice de permutation)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On appelle **matrice de permutation** la matrice $P_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ sur la matrice identité I_n :

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

Exemple. Dans le cas $n = 3$, $P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $P_{1,3} = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{pmatrix}$, $P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}$.

Définition 2.5 (Matrice de dilatation)

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle **matrice de dilatation** la matrice $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ sur la matrice identité I_n :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}.$$

Exemple. Dans le cas $n = 3$, $D_1(2) = \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $D_2(3i) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&3i&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $D_3(\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Définition 2.6 (Matrice de transvection)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle **matrice de transvection** la matrice $T_{i,j}(\alpha) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur la matrice identité I_n :

$$T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}.$$

Exemple. Dans le cas $n = 3$, $T_{1,2}(2) = \begin{pmatrix} 1&2&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $T_{1,3}(5) = \begin{pmatrix} 1&0&5\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$, $T_{3,1}(5) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\5&0&1 \end{pmatrix}$, $T_{2,3}(4i) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&4i\\0&0&1 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.7 (Opérations élémentaires et produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les produits matriciels $P_{i,j}A$, $D_i(\lambda)A$ et $T_{i,j}(\alpha)A$ reviennent à effectuer les opérations élémentaires $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ et $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur la matrice A.

Démonstration. Il suffit de revenir à la décomposition des matrices $P_{i,j}A$, $D_i(\lambda)A$ et $T_{i,j}(\alpha)A$ en fonction de I_n et des matrices E_{ij}. On constate ensuite que le produit $E_{ij}A$ ne contient que des 0, sauf à la i-ème ligne, qui contient les valeurs de la j-ième ligne de A. Cela permet de conclure. □

Exemple. On trouve par calcul : $P_{1,2}\left(\begin{smallmatrix}0&1&0&6\\2&0&9&0\\0&3&0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1&0&6\\2&0&9&0\\0&3&0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2&0&9&0\\0&1&0&6\\0&3&0&1\end{smallmatrix}\right)$.

Remarque. En multipliant à droite plutôt qu'à gauche, les même opérations s'appliqueraient aux colonnes plutôt qu'aux lignes. Traditionnellement, on a plus tendance à travailler sur les lignes.

3 Système linéaire

3.1 Définitions

Définition 3.1 (Système linéaire)

On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues x_1, x_2, …, x_p tout système $(\mathcal{S})$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 3.2 (Solution d'un système linéaire)

Un p-uplet de scalaires est **solution du système** $(\mathcal{S})$ s'il est solution de toutes les équations du système.

— **Résoudre** le système $(\mathcal{S})$ c'est déterminer l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$.
— Un système est dit **compatible** s'il existe au moins un p-uplet solution.
— Deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Définition 3.3 (Système homogène)

On appelle **système homogène** un système dont tous les seconds membres b_i sont nuls.
On appelle **système homogène associé** à un système $(\mathcal{S})$ le système homogène $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant tous les b_i par 0.

Exemple. Le système homogène associé de $\begin{cases}2x_1+3x_2=5\\4x_1+3x_2=0\end{cases}$ est $\begin{cases}2x_1+3x_2=0\\4x_1+3x_2=0\end{cases}$.

Remarque. Un système homogène a toujours au moins une solution : $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$.

3.2 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 3.4 (Matrice associée)

La matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la **matrice associée** au système $(\mathcal{S})$.

Remarque. Si l'on pose $B = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$, résoudre $(\mathcal{S})$ équivaut à chercher l'ensemble des $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$ tels que $AX = B$.

Exemple. On considère le système linéaire $\begin{cases}2x_1+3x_2=5\\4x_1+3x_2=0\end{cases}$. Sa matrice associée est $\left(\begin{smallmatrix}2&3\\4&3\end{smallmatrix}\right)$ et résoudre le système revient à chercher les réels x_1, x_2 tels que $\left(\begin{smallmatrix}2&3\\4&3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}\right)$.

Proposition 3.5 (Ensemble des solutions d'un système compatible)

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire de forme matricielle $AX = B$. Si $(\mathcal{S})$ est compatible, alors ses solutions sont les éléments de la forme $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y est solution du système homogène associé.

Démonstration. Si $(\mathcal{S})$ est compatible, alors il existe au moins une solution particulière X_0. On a alors :

$$AX = B \iff AX = AX_0 \iff A(X - X_0) = 0 \iff X - X_0 \text{ est solution du système homogène associé .}$$

En posant $Y = X - X_0$, obtient bien des solutions sous la forme $X = X_0 + Y$. □

Remarque. Ce résultat permettra de faire le lien avec des propriétés du second semestre, mais est peu utilisé pour les résolutions concrètes de systèmes linéaires.

Remarque. On a vu plus tôt dans le chapitre que si X est une matrice colonne de coefficients $x_1, \ldots, x_n$ et si A est une matrice dont on note $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes, alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A, avec $AX = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$. Si on trouve des scalaires $b_1, \ldots, b_n$ tels que $B = \sum_{i=1}^{n} b_i A_i$, alors le vecteur $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est solution du système $AX = B$, qui est donc compatible (et on a au passage obtenu une solution particulière).

3.3 Résolution par pivot de Gauss

Soit (S) est un système linéaire :
- si l'on exécute $L_i \longleftrightarrow L_j$, il suffit de refaire $L_i \longleftrightarrow L_j$ pour revenir au système (S).
- idem si l'on exécute $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \neq 0$, il suffit de faire $L_i \longleftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$ (d'où l'importance de $\lambda \neq 0$) pour revenir au système (S).
- et si l'on exécute $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, il suffit de faire $L_i \longleftarrow L_i - \lambda L_j$ pour revenir au système (S).

Lorsqu'on résout un système linéaire en utilisant des opérations élémentaires (par multiplication à gauche des matrices associées), on peut donc procéder par équivalences.

Méthode : en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire $(\mathcal{S})$, on transforme le système linéaire $(\mathcal{S})$ en un système linéaire $(\mathcal{S}')$ qui lui est équivalent et qui est échelonné, c'est-à-dire de la forme (si $r \leqslant n$ et $r \leqslant p$) :

$$(\mathcal{S}') \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1r}x_r & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2r}x_r & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & a_{rr}x_r & + & \ldots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\ & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & 0 & = & b_n \end{array} \right. .$$

Pour que $(\mathcal{S}')$ soit compatible, il faut que les $n - r$ dernières équations soient vérifiées. On peut alors remonter les lignes du système en introduisant $n - r$ paramètres pour parcourir les solutions.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système $(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 4y - z - 3t = 3 \\ 5x - 10y - z - 7t = 5 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

<u>Solution :</u> On raisonne sous forme matricielle pour alléger les notations (mais ce n'était pas une obligation)

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad (\mathcal{S}_1) \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 5 & -10 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ -3z - t = 1 \\ 0 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système $(\mathcal{S}_1)$ n'a donc pas de solution.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système $(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x - 4y - z - 3t = 3 \\ 5x - 10y - z - 7t = 7 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Solution :

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad (S_2) \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 5 & -10 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ -3z - t = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{4\lambda}{3} + 2\mu \\ y = \mu \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{1+\lambda}{3} \\ t = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S}_2)$ est donc $\left\{(\frac{4}{3} + \frac{4\lambda}{3} + 2\mu, \mu, \frac{1+\lambda}{3}, \lambda) | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système $(\mathcal{S}_3) \begin{cases} 2a - b + 5d = 0 \\ -3a + b - c - 8d = 0 \\ a + c + 3d = 0 \end{cases}$

Solution :

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad (S_3) \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} a + c + 3d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -3\lambda - \mu \\ b = -\lambda - 2\mu \\ c = \mu \in \mathbb{R} \\ d = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S}_3)$ est donc $\left\{(-3\lambda - \mu, -\lambda - 2\mu, \mu, \lambda) | (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

4 Ensemble des matrices carrées

4.1 Cas particuliers

Définition 4.1 (Matrices triangulaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :
- A est une matrice **triangulaire supérieure** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
- A est une matrice **triangulaire inférieure** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
- A est une matrice **diagonale** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.

Remarque. Quand A est une matrice diagonale, on note parfois $A = \mathrm{Diag}\,(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

Remarque. Les matrices diagonales de type λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$ sont aussi appelées **matrices scalaires**.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(1,0,3)$ est une matrice diagonale.

Remarque. Avec ces définitions, il est immédiat qu'une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure. De même pour les matrices triangulaires inférieures.

Proposition 4.2 (Produit de matrices triangulaires)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.
- Le produit de deux matrices $A = \mathrm{Diag}\,(a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n})$ et $B = \mathrm{Diag}\,(b_{1,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{n,n})$ est la matrice diagonale $AB = \mathrm{Diag}\,(a_{1,1}b_{1,1}, a_{2,2}b_{2,2}, \ldots, a_{n,n}b_{n,n})$.

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux matrices triangulaires supérieures. Notons $C = AB$, avec $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Par définition du produit matriciel, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Soit i et j deux entiers tels que $i > j$. Alors si $k < i$, $a_{ik} = 0$, et si $k > j$, $b_{kj} = 0$. Donc $a_{ik}b_{kj} = 0$ pour tous les termes de la somme. Donc $c_{ij} = 0$. Donc C est triangulaire supérieure.
On montre de même le résultat sur les matrices triangulaires inférieures.
Pour le résultat sur les matrices diagonales, par ce qui précède, le produit de deux matrices diagonales est une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. Donc une matrice diagonale, et il suffit de calculer ses termes diagonaux. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{ik}b_{ki} = 0$ si $k > i$ ou $k < i$. Donc $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. □

Définition 4.3 (Matrices symétriques, antisymétriques)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :
- A est une matrice **symétrique** lorsque $A^\top = A$, c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$.
- A est une matrice **antisymétrique** lorsque $A^\top = -A$, c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de taille n.

Exemple. $\left(\begin{smallmatrix}1&2&1\\2&0&5\\1&5&3\end{smallmatrix}\right)$ est une matrice symétrique. $\left(\begin{smallmatrix}0&2&1\\-2&0&-5\\-1&5&0\end{smallmatrix}\right)$ est une matrice antisymétrique.

Remarque. Une matrice antisymétrique a nécessairement des zéros sur sa diagonale. En effet, si $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} = -a_{ii}$, donc $2a_{ii} = 0$, donc $a_{ii} = 0$.

4.2 Calcul de puissances

Proposition 4.4 (Formule du binôme de Newton)

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}))^2$ tels que $AB = BA$ et soit $m \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k},$$

où A^k est le produit matriciel de A par lui-même k fois, avec la convention $A^0 = I_p$.

Remarque. Attention à ne pas oublier la condition $AB = BA$, qui ne figurait pas dans la formule pour les réels ! Si $AB \neq BA$, on trouve par exemple en développant $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose $P(m) =$ « $(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$ ».

- $(A + B)^0 = I_p$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{-k} = 1 I_p I_p = I_p$ donc $P(0)$ est vraie.
- Soit m un entier naturel fixé. On suppose que $P(m)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
(A + B)^{m+1} &= (A + B) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} && \text{par } P(m)\\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{k+1} B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B A^k B^{m-k} && \text{en développant}\\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{k+1} B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k+1} && \text{car } AB = BA\\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} A^i B^{m-i+1} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k+1} && \text{en posant } i = k + 1\\
&= A^{m+1} + B^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) A^k B^{m-k+1} && \text{en séparant } k = 0 \text{ et } i = m + 1\\
&= A^{m+1} + B^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} A^k B^{m-k+1} && \text{par la formule de Pascal}\\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} A^k B^{m-k+1}
\end{aligned}$$

Donc $P(m + 1)$ est vraie. D'où le résultat annoncé. □

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les puissances n-ièmes de : $J = \left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n) : J^n = 3^{n-1} J$.

- $J^1 = 3^0 J$ donc $P(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Un calcul donne $J^2 = 3J$, donc :

$$J^{n+1} = J^n J = 3^{n-1} J J = 3^{n-1} 3J = 3^n J.$$

  Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1} J$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^n.
Solution : Raisonner par conjecture puis récurrence n'est pas concluant ici (on trouve $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $A^3 = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 36 \\ 0 & 8 \end{smallmatrix}\right)$, la conjecture est donc trop difficile). Par contre $A = 2I_2 + 3J$, avec $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On connaît les puissances de I_2 et on trouve par calcul que $J^2 = 0_2$, donc $\forall k \geqslant 2 \ J^k = 0_2$. De plus $2I_2 3J = 6J = 3J2I_2$.
On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : $\forall n \geqslant 1$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3J)^k (2I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} J^k = 1 \times 3^0 2^n I_2 + n \times 3^1 2^{n-1} J + 0_2 \ = \begin{pmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

4.3 Matrices inversibles

Définition 4.5 (Matrice inversible)

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** quand il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB = BA = I_n$.
Cette matrice est alors unique et notée $B = A^{-1}$.
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Montrons l'unicité. Supposons que B et C sont deux matrices qui conviennent. Alors $AB = I_n$, donc par produit avec C, $CAB = C$. Or $CA = I_n$. Donc $B = C$, d'où l'unicité. □

Remarque. On montrera plus tard dans l'année qu'il suffit de vérifier $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ pour garantir l'inversibilité. Cela permet d'alléger les démonstrations.

Remarque. Attention : même si multiplier par l'inverse d'une matrice permet de « neutraliser » la multiplication par cette matrice, l'inverse A^{-1} ne doit jamais être écrit sous la forme d'une fraction.

Proposition 4.6 (Inverse de l'inverse)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration. On a $A^{-1}A = I_n$, donc A^{-1} est inversible et son inverse vaut A. □

Proposition 4.7 (Inverse du produit)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. On a $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$. □

Remarque. On en déduit par récurrence que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $A^k \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Proposition 4.8 (Inverse de la transposée)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors $A^\top$ est inversible et $\left(A^\top\right)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Démonstration. On a $(A^{-1})^\top A^\top = \left(AA^{-1}\right)^\top = I_n^\top = I_n$. Donc $A^\top$ est inversible, d'inverse $(A^{-1})^\top$. □

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 + A = I_2$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
Solution : $A(A + I_2) = I_2$, donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = A + I_2$.

4.4 Calcul d'inverse par résolution de système

Proposition 4.9 (Résolution de système dans le cas d'une matrice inversible)

Soit $(\mathcal{S})$ un système linéaire de forme matricielle $AX = B$. Si la matrice A est inversible, le système $(\mathcal{S})$ possède un unique n-uplet solution $X = A^{-1}B$.

Démonstration. Si A est inversible, on peut multiplier $AX = B$ à gauche par A^{-1}, ce qui donne le résultat annnoncé. $\square$

Remarque. Si le système linéaire n'a pas de solution ou admet plusieurs solutions, la matrice associée n'est donc pas inversible (par contraposée).

Remarque. Cette constatation permet d'étudier l'inversibilité d'une matrice par résolution de système linéaire : on fixe un vecteur colonne B quelconque et on résout $AX = B$. Dans le cas inversible, l'expression de la solution permet de déduire la valeur de A^{-1}.

Exercice 8. Étudier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ par résolution de système.

Solution : On pose $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Le calcul qui suit peut être effectué sous forme matricielle si on le souhaite.

$$AX = B \iff \begin{cases} x + 3z = b_1 \\ 2x + y + 2z = b_2 \\ -x + y + z = b_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3z = b_1 \\ y - 4z = -2b_1 + b_2 \\ y + 4z = b_1 + b_3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3z = b_1 \\ y - 4z = -2b_1 + b_2 \\ 8z = 3b_1 - b_2 + b_3 \end{cases} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$$

Le système est échelonné, il ne reste plus qu'à le remonter :

$$AX = B \iff \begin{cases} x = b_1 - 3(\frac{3}{8}b_1 - \frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3) \\ y = -2b_1 + b_2 + 4(\frac{3}{8}b_1 - \frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3) \\ z = \frac{3}{8}b_1 - \frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{8}b_1 + \frac{3}{8}b_2 - \frac{3}{8}b_3 \\ y = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3 \\ z = \frac{3}{8}b_1 - \frac{1}{8}b_2 + \frac{1}{8}b_3 \end{cases}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Proposition 4.10 (Inversibilité d'une matrice triangulaire)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire. Alors A est inversible si et seulement si elle n'a pas de 0 sur sa diagonale et si elle est inversible, son inverse est aussi triangulaire.

Démonstration. On effectue la démonstration dans le cas triangulaire supérieur, le cas triangulaire inférieur s'en déduit ensuite par passage à la transposée.

On pose $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Puisque si $i > j$, $a_{ij} = 0$ (la matrice A étant triangulaire supérieure), une résolution de système donne :

$$AX = B \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \quad\vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système étant déjà échelonné, il suffit de remonter ses lignes pour le résoudre :

— Si $a_{nn} = 0$, la dernière ligne devient $0 = b_n$, donc le système n'aura pas une unique solution. Donc A n'est pas inversible.

— Si $a_{nn} \neq 0$,

$$AX = B \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} = b_1 - a_{1,n}\frac{b_n}{a_{nn}} \\ \quad\vdots \\ a_{kk}x_k + \ldots + a_{k,n-1}x_{n-1} = b_k - a_{k,n}\frac{b_n}{a_{nn}} \\ \quad\vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1,n}\frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

  — Si $a_{n-1,n-1} = 0$, l'avant dernière ligne devient $0 = b_{n-1} - a_{n-1,n}\frac{b_n}{a_{nn}}$, donc A n'est pas inversible.

  — Si $a_{n-1,n-1} \neq 0$, on recommence...

En remontant jusqu'au bout, on déduit que si l'un des a_{kk} est nul, la matrice A n'est pas inversible. Si les coefficients diagonaux sont tous non nuls, la résolution du système donne x_n en fonction de b_n, x_{n-1} en fonction de b_n et b_{n-1}, ..., x_k en fonction de b_n, b_{n-1}, ..., b_k, et x_1 en fonction de tous les b_i. On obtient donc une unique solution.
Donc A est inversible et les dépendances en fonction des b_i garantissent de plus que A^{-1} est triangulaire supérieure. □

Remarque. En particulier, si D est une matrice diagonale et inversible, son inverse est aussi une matrice diagonale.

Exemple. La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est inversible puisqu'elle n'a pas de zéro sur la diagonale et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.5 Calcul d'inverse par Pivot de Gauss sur les matrices

Proposition 4.11 (Inversibilité des matrices associées aux opérations élémentaires)

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les matrices $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$ et $T_{i,j}(\alpha)$ sont inversibles.

Démonstration. Les opérations élémentaires associées permettent de conjecturer les valeurs des inverses :

— $P_{i,j}P_{i,j} = I_n$, donc $P_{i,j}$ est inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

— $D_i(\lambda)D_i(\frac{1}{\lambda}) = I_n$ donc $D_i(\lambda)$ est inversible et $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$ (on comprend au passage pourquoi on impose $\lambda \neq 0$).

— $T_{i,j}(\alpha)T_{i,j}(-\alpha) = I_n$ donc $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible et $T_{i,j}(\alpha)^{-1} = T_{i,j}(-\alpha)$.

□

Proposition 4.12 (Inversibilité des matrices modifiées par opérations élémentaires)

Les opérations élémentaires sur les matrices préservent l'inversibilité.

Démonstration. Si A est une matrice inversible, la matrice obtenue après avoir réalisé une opération élémentaire sur les lignes est du type $P_{i,j}A$, $D_i(\lambda)A$ ou $T_{i,j}(\alpha)A$, elle est donc toujours inversible comme produit de matrices inversibles. $\square$

Remarque. En modifiant l'égalité $A = I_nA$ par produits à gauche, on peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A et I_n. Si on parvient à se ramener à une égalité du type $I_n = BA$, on aura montré que A est inversible avec $A^{-1} = B$. Si au contraire les opérations élémentaires transforment A en une matrice (triangulaire) non inversible, on aura montré que A n'est pas inversible.

Remarque. Les opérations effectuées sur les matrices sont les mêmes que dans le cas de la résolution par système linéaire, seule la mise en forme change.

Exercice 9. Étudier l'inversibilité de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
<u>Solution :</u>

$$\begin{aligned}
B = I_3B &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \quad \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} B \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_2
\end{aligned}$$

La matrice triangulaire obtenue a l'un de ses termes diagonaux nul, elle n'est donc pas inversible. Donc B n'est pas non plus une matrice inversible.

Exercice 10. Étudier l'inversibilité de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
<u>Solution :</u>

$$\begin{aligned}
C = I_3C &\iff \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} C \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} C \quad L_2 \longleftarrow \frac{1}{4}L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -3 & 1 \end{pmatrix} C \quad L_3 \longleftarrow L_3 + 6L_2
\end{aligned}$$

La matrice triangulaire n'a aucun zéro sur la diagonale, donc C est inversible. On cherche maintenant C^{-1}.

$$\begin{aligned}
C = I_3C &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} C \quad L_3 \longleftarrow \frac{2}{9}L_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} C \quad \begin{matrix} L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{3}{4}L_3 \end{matrix} \\
&\iff I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} C \quad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2
\end{aligned}$$

On en déduit que $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.