Équations différentielles

Cours de É. Bouchet – PCSI

27 novembre 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, on note I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Définitions et structure linéaire

Définition 1.1 (Solution d'une l'équation différentielle d'ordre 1)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction y définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **solution** de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ si elle est dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

Exemple. La fonction exponentielle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

Définition 1.2 (Équation différentielle homogène associée)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle homogène associée** à l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ l'équation dont le second membre est réduit à 0 :

$$y' + a(t)y = 0.$$

Proposition 1.3 (Principe de superposition)

Soit a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si y_1 est solution de l'équation $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 est solution de l'équation $y' + a(t)y = b_2(t)$, alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda y_1 + \mu y_2)$ est solution de l'équation $y' + a(t)y = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t)$.

Remarque. Soit y_P une solution de $y' + a(t)y = b(t)$. Pour toute autre solution y de $y' + a(t)y = b(t)$, la fonction $y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $b(t) - b(t)$, c'est-à-dire solution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$. On a peut donc écrire toute solution y de $y' + a(t)y = b(t)$ sous la forme :

$$y = y_H + y_P,$$

où y_P est une solution particulière fixée et $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation homogène associée.

1.2 Résolution de l'équation homogène

Proposition 1.4 (Résolution de l'équation homogène)

Soit a une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et A une de ses primitives sur I. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$ sont les fonctions de la forme : $y_H : t \mapsto Ce^{-A(t)}$, où C est une constante de $\mathbb{K}$.

Exercice 1. Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation $y' - ty = 0$ sur $\mathbb{R}$.

1.3 Recherche d'une solution particulière

Proposition 1.5 (Méthode de la variation de la constante)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et A une primitive de a sur I. Une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ est la fonction $y_P : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$, où la fonction C est une primitive de be^A.

Remarque. Ce résultat se retrouve en remarquant qu'il faut chercher une solution du type $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$. En injectant cette forme dans $y' + a(t)y = b(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) &\iff \forall t \in I, \quad C'(t)e^{-A(t)} + C(t)(-A'(t))e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \quad C'(t)e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \quad C'(t) = b(t)e^{A(t)}
\end{aligned}$$

Une telle fonction y est donc bien solution si et seulement si $C' = be^{A}$.

Exercice 2. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y' - ty = t$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Lorsqu'on étudie $y' + ay = b(t)$ avec $a \in \mathbb{K}^*$ une constante, on peut éviter l'utilisation de la variation de la constante (et les calculs de primitive qui vont avec) grâce à quelques astuces de calcul :

- Si b est aussi une constante, on cherche une solution y_P constante.
- Si b est polynomiale, on cherche une solution y_P polynomiale, de même degré.
- Si $b(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda e^{\alpha t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (si $\alpha \neq -a$) ou de type $y_P(t) = \lambda t e^{\alpha t}$ (si $\alpha = -a$).
- Dans le cas réel, si $b(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  On peut aussi trouver une solution complexe de $y' + ay = e^{i\omega t}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\omega t)$).

Exercice 3. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' + 3y = t^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs complexes.

Exercice 4. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' - 6y = e^{it}$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs complexes.

Exercice 5. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' + y = \sin(3t)$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs réelles.

1.4 Résolution de l'équation complète

Proposition 1.6 (Solution générale de $y' + a(t)y = b(t)$)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ sont les fonctions de la forme $y = y_H + y_P$, où y_H est une solution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$ et y_P est une solution particulière de $y' + a(t)y = b(t)$.

Remarque. Si l'on combine tous les résultats obtenus jusqu'ici, on aboutit à une solution générale de $y' + a(t)y = b(t)$ de la forme :

$$y : t \mapsto Ce^{-A(t)} + \left(\int_{\alpha}^{t} b(s)e^{A(s)} ds \right) e^{-A(t)},$$

où $C \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in I$. Si l'on n'impose aucune condition supplémentaire à y, il existe donc une infinité de solutions, paramétrées par la constante C.

Exercice 6. Déterminer les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{t} = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.7 (Solution du problème de Cauchy)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'on fixe $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique fonction y dérivable sur I qui satisfait le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Exercice 7. Déterminer la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation $y' - \frac{y}{t} = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $y(1) = 0$.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

2.1 Définition et structure linéaire

Définition 2.1 (Solution d'une l'équation différentielle d'ordre 2)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction y définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **solution** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ si elle est deux fois dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t).$$

Remarque. En physique, on rencontre souvent l'équation $y''(t) + \frac{\omega_0}{Q} y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$, il s'agit également d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.

Définition 2.2 (Équation différentielle homogène associée)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle homogène associée** à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ l'équation dont le second membre est réduit à 0 :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Proposition 2.3 (Principe de superposition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si y_1 est solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y'' + ay' + by = f_2(t)$, alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda y_1 + \mu y_2)$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$.

Remarque. Soit y_P une solution de $y'' + ay' + by = f(t)$. Pour toute solution y de $y'' + ay' + by = f(t)$, la fonction $y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t)$, c'est-à-dire solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$. On a peut donc écrire toute solution y de $y'' + ay' + by = f(t)$ sous la forme :

$$y = y_H + y_P,$$

où y_P est une solution fixée et $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation homogène associée.

2.2 Résolution de l'équation homogène

Définition 2.4 (Équation caractéristique)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ l'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.5 (Solutions de $y'' + ay' + by = 0$ à valeurs complexes)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et (E) l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

- Si (E) a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
- Si (E) a une unique solution complexe r_0, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$.

Exercice 8. Déterminer les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.6 (Solutions de $y'' + ay' + by = 0$ à valeurs réelles)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.
- Si (E) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
- Si (E) a une unique solution réelle r_0, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$.
- Si (E) a deux solutions complexes conjuguées $r \pm i\omega$ ($r \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$), une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))\, e^{rt}$.

Exercice 9. Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2.3 Recherche d'une solution particulière

Quelques astuces permettent de deviner la forme d'une solution de $y'' + ay' + by = f(t)$:
- Si f est une constante et $b \neq 0$, on cherche une solution y_P constante.
- Si f est polynomiale, on cherche une solution y_P polynomiale (le plus souvent de même degré).
- Si $f(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on regarde l'équation caractéristique :
  - si α n'est pas racine, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
  - si α est racine simple, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda t e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
  - si α est racine double, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si les coefficients a et b sont réels et $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
  On peut aussi trouver une solution complexe de $y'' + ay' + by = e^{i\omega t}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\omega t)$).

Exercice 10. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = t^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$.

2.4 Résolution de l'équation complète

Proposition 2.7 (Solution générale de $y'' + ay' + by = f(t)$)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ sont les fonctions de la forme $y = y_H + y_P$, où y_H est une solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ et y_P est une solution particulière de $y'' + ay' + by = f(t)$.

Proposition 2.8 (Solution du problème de Cauchy)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $t_0 \in I$. Pour tout couple $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique fonction y deux fois dérivable sur I qui satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

Remarque. Interprétation physique : en mécanique du point, l'équation du mouvement ne suffit pas à déterminer la trajectoire de l'objet. Typiquement, on la détermine en utilisant la position initiale (y_0) et la vitesse initiale (y'_0).

Exercice 13. Déterminer l'unique fonction à valeurs réelles solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$