Équations différentielles

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' + 3y = 0$
2. $y' - 2ty = 0$
3. $y' + ay = 0$
4. $y' + \sin(3t)y = 0$
5. $y' + \frac{e^t}{e^t+1}y = 0$

Exercice 2 (★). Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2ty = e^{t+t^2}$, sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' + \frac{1}{t}y = e^t$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 3 (★). Déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y' - 2y = 3$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $y' - 2y = t^2$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $y' - 2y = e^{4t}$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $y' - 2y = 3e^{2t}$ sur $I = \mathbb{R}$
5. $y' - 2y = \sin(2t)$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $y' - 2y = 4\sin(2t) - 2t^2$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 4 (★★). Résoudre (en précisant l'intervalle de résolution), les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y'(x) - y(x) = x$
2. $y'(x) + y(x) = 2(e^x + e^{-x})$
3. $y'(x) = 2y(x) + (2x^2 - 1)e^{x^2}$
4. $(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 0$
5. $y'(x) + y(x)\tan(x) = \cos^2(x)$

Indication : pour la troisième, chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto (ax + b)e^{x^2}$

Exercice 5 (★). Déterminer l'unique fonction u dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, u'(t) + \frac{1}{2}u(t) = t + 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 6 (★★). Résoudre sur $]-1, +\infty[$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs réelles) :

$$\begin{cases} (x+1)y'(x) - xy(x) + 1 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 7 (★). Résoudre les équations différentielles suivantes (fonctions à valeurs réelles) :

1. $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 1$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}$
3. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sin(x)$
4. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x$
5. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 2$

Exercice 8 (★). Déterminer la fonction y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 9 (★★). Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy (fonctions à valeurs complexes) :

$$\begin{cases} y''(x) - 2(1+i)y'(x) + 2iy(x) = x + i \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 (★★★).

1. Soit $u : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan(t) \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{t} \end{array}$. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 qui est vérifiée par chacune de ces fonctions.
2. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions u de classe C^1 sur un intervalle I (à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t \in I$: $u'(t) = 1 + u(t)^2$.
3. Par un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions v de classe C^1 sur un intervalle I (à déterminer également) et à valeurs réelles qui vérifient pour tout $t \in I$: $v(t) \neq 0$ et $v'(t) = \frac{1}{2v(t)}$.

Exercice 11 (Type DS)**.** On cherche à déterminer les fonctions y définies de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle (E) : $|t|\,y' + y = \frac{1}{1+t}$. On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée.

1. **Résolution sur $I_1 =]0,+\infty[$.** Résoudre (E) sur l'intervalle I_1. On appellera C_1 la constante utilisée.
2. **Résolution sur $I_2 =]-1,0[$.**
   (a) Réécrire (E) sous la forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   (b) Résoudre l'équation homogène (E_0) sur I_2.
   (c) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $t \in I_2$, $\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{1+t}$.
   (d) A l'aide de la méthode de la variation de la constante et du résultat de la question précédente, déterminer une solution particulière de (E) sur I_2.
   (e) Conclure pour la résolution de (E) sur I_2. On appellera C_2 la constante utilisée.
3. **Résolution sur $I =]-1,+\infty[$.** Soit f une solution de (E) sur I, c'est-à-dire une fonction dérivable sur I telle que $\forall t \in I$, $|t|f'(t) + f(t) = \frac{1}{1+t}$.
   (a) Que vaut $f(0)$? Justifier que f est continue en 0.
   (b) Exprimer $f(t)$ pour $t \in I_1$, puis pour $t \in I_2$.
   (c) En utilisant la continuité de f en 0, quelles contraintes voit-on apparaître sur C_1 et C_2 ?
   (d) Calculer la limite pour $t \to 0^-$ de $\frac{f(t)-f(0)}{t}$. Que peut-on en déduire ?
   (e) Conclure la résolution de (E) sur I.