Équations différentielles

Cours de É. Bouchet – PCSI

19 décembre 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, on note I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Définitions et structure linéaire

Définition 1.1 (Solution d'une l'équation différentielle d'ordre 1)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction y définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **solution** de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ si elle est dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

Exemple. La fonction exponentielle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

Définition 1.2 (Équation différentielle homogène associée)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle homogène associée** à l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ l'équation dont le second membre est réduit à 0 :

$$y' + a(t)y = 0.$$

Proposition 1.3 (Principe de superposition)

Soit a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si y_1 est solution de l'équation $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 est solution de l'équation $y' + a(t)y = b_2(t)$, alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda y_1 + \mu y_2)$ est solution de l'équation $y' + a(t)y = \lambda b_1(t) + \mu b_2(t)$.

Démonstration. y_1 et y_2 sont dérivables sur I, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ l'est aussi par combinaison linéaire. De plus, $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned}(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) + a(t)(\lambda y_1 + \mu y_2)(t) &= \lambda y_1'(t) + \mu y_2'(t) + a(t)\lambda y_1(t) + a(t)\mu y_2(t) \\ &= \lambda(y_1'(t) + a(t)y_1(t)) + \mu(y_2'(t) + a(t)y_2(t)) \\ &= \lambda b_1(t) + \mu b_2(t),\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

Remarque. Soit y_P une solution de $y' + a(t)y = b(t)$. Pour toute autre solution y de $y' + a(t)y = b(t)$, la fonction $y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $b(t) - b(t)$, c'est-à-dire solution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$. On a peut donc écrire toute solution y de $y' + a(t)y = b(t)$ sous la forme $y = y_H + y_P$, où y_P est une solution particulière fixée et $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation homogène associée.

1.2 Résolution de l'équation homogène

Proposition 1.4 (Résolution de l'équation homogène)

Soit a une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et A une de ses primitives sur I. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$ sont les fonctions de la forme : $y_H : t \mapsto Ce^{-A(t)}$, où C est une constante de $\mathbb{K}$.

Démonstration. On montre que ces fonctions sont des solutions, et que ce sont les seules :

- Soit $C \in \mathbb{K}$ et y_H définie sur I par $\forall t \in I$, $y_H(t) = Ce^{-A(t)}$. Alors y_H est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables et $\forall t \in I$, $y_H'(t) = -CA'(t)e^{-A(t)} = -A'(t)y_H(t) = -a(t)y_H(t)$. Donc y_H est bien solution de $y' + a(t)y = 0$.

- Réciproquement, soit y une solution de $y' + a(t)y = 0$, montrons que la fonction ye^A est constante sur l'intervalle I. Cette fonction est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et :

$$\forall t \in I, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y(t)e^{A(t)}\right) = y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}\left(y'(t) + a(t)y(t)\right) = 0.$$

  La fonction ye^A est donc constante sur I : $\exists C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in I$, $y(t) = Ce^{-A(t)}$.

$\square$

Remarque. En écriture ensembliste, l'ensemble des solutions s'écrit donc $\{t \mapsto Ce^{-A(t)} | C \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 1. Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation $y' - ty = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Une primitive de $t \mapsto -t$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto -\frac{t^2}{2}$. Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-(-\frac{t^2}{2})} = e^{\frac{t^2}{2}}$. Donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $y\ : t \mapsto \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.3 Recherche d'une solution particulière

Proposition 1.5 (Méthode de la variation de la constante)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et A une primitive de a sur I. Une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ est la fonction $y_P : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$, où la fonction C est une primitive de be^A.

Démonstration. Soit y_P la fonction ainsi définie, montrons qu'elle est bien solution de l'équation différentielle. Elle est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions dérivables, et un calcul de dérivée donne :

$$\forall t \in I, \quad y_P'(t) = C'(t)e^{-A(t)} + C(t)(-A'(t)e^{-A(t)}) = b(t)e^{A(t)}e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} = -a(t)y_P(t) + b(t).$$

y_P est donc bien solution de l'équation différentielle, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remarque. Ce résultat se retrouve en remarquant qu'il faut chercher une solution du type $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$. En injectant cette forme dans $y' + a(t)y = b(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) &\iff \forall t \in I, \quad C'(t)e^{-A(t)} + C(t)(-A'(t))e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \quad C'(t)e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\
&\iff \forall t \in I, \quad C'(t) = b(t)e^{A(t)}
\end{aligned}$$

Une telle fonction y est donc bien solution si et seulement si $C' = be^A$.

Exercice 2. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y' - ty = t$ sur $\mathbb{R}$.
Solution :

- Méthode 1 : on a vu dans l'exercice précédent que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on cherche donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$. La fonction $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ convient. Une solution est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}} = -1$.

- Méthode 2 : les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{\frac{t^2}{2}}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{\frac{t^2}{2}}$, où λ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - ty(t) = t &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + \lambda(t)\frac{2t}{2} - \lambda(t)t = t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t)e^{\frac{t^2}{2}} = t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

  Une primitive de cette fonction est $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$, donc une solution de l'équation différentielle est la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^2}{2}} = -1$.

- Méthode 3 : si on a un peu d'intuition, on pose $y : t \mapsto -1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 0$, donc $y'(t) - ty(t) = 0 - (-t) = t$. Cette fonction est donc une solution particulière de l'équation.

Remarque. Lorsqu'on étudie $y' + ay = b(t)$ avec $a \in \mathbb{K}^*$ une constante, on peut éviter l'utilisation de la variation de la constante (et les calculs de primitive qui vont avec) grâce à quelques astuces de calcul :

- Si b est aussi une constante, on cherche une solution y_P constante.
- Si b est polynomiale, on cherche une solution y_P polynomiale, de même degré.
- Si $b(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda e^{\alpha t}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (si $\alpha \neq -a$) ou de type $y_P(t) = \lambda t e^{\alpha t}$ (si $\alpha = -a$).
- Dans le cas réel, si $b(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On peut aussi trouver une solution complexe de $y' + ay = e^{i\omega t}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\omega t)$).

Exercice 3. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' + 3y = t^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs complexes.
Solution : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, on pose $y : t \mapsto at^2 + bt + c$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 2at + b$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + 3y(t) = t^2 + 1 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2at + b + 3at^2 + 3bt + 3c = t^2 + 1 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 3at^2 + (2a + 3b)t + b + 3c = t^2 + 1 \\
&\Longleftarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 2a + 3b = 0 \\ b + 3c = 1 \end{cases} \\
&\Longleftarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{9} \\ c = \frac{11}{27} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution de $y' + 3y = t^2 + 1$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{2t}{9} + \frac{11}{27}$.

Exercice 4. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' - 6y = e^{it}$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs complexes.
Solution : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $y : t \mapsto \lambda e^{it}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = \lambda i e^{it}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - 6y(t) = e^{it} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda i e^{it} - 6\lambda e^{it} = e^{it} \\
&\iff \lambda(i - 6) = 1 \\
&\iff \lambda = -\frac{6 + i}{37}
\end{aligned}$$

Une solution de $y' - 6y = e^{it}$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -\frac{6+i}{37} e^{it}$.

Exercice 5. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' + y = \sin(3t)$ sur $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs réelles.
Solution : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on pose $y : t \mapsto \lambda \cos(3t) + \mu \sin(3t)$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = -3\lambda \sin(3t) + 3\mu \cos(3t)$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + y(t) = \sin(3t) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad -3\lambda \sin(3t) + 3\mu \cos(3t) + \lambda \cos(3t) + \mu \sin(3t) = \sin(3t) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin(3t)(-3\lambda + \mu) + \cos(3t)(3\mu + \lambda) = \sin(3t) \\
&\Longleftarrow \begin{cases} -3\lambda + \mu = 1 \\ 3\mu + \lambda = 0 \end{cases} \\
&\Longleftarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{10} \\ \mu = \frac{1}{10} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution de $y' + y = \sin(3t)$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -\frac{3}{10} \cos(3t) + \frac{1}{10} \sin(3t)$.

1.4 Résolution de l'équation complète

Proposition 1.6 (Solution générale de $y' + a(t)y = b(t)$)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ sont les fonctions de la forme $y = y_H + y_P$, où y_H est une solution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$ et y_P est une solution particulière de $y' + a(t)y = b(t)$.

Démonstration. On a montré en remarque plus tôt dans le chapitre que toute solution y de $y' + a(t)y = b(t)$ peut s'écrire sous la forme $y = y_H + y_P$. Réciproquement, le principe de superposition nous donne que $y_H + y_P$ est solution de $y' + a(t)y = b(t)$, d'où le résultat. $\square$

Remarque. Si l'on combine tous les résultats obtenus jusqu'ici, on aboutit à une forme générale pour les solutions de $y' + a(t)y = b(t)$:

$$y : t \mapsto Ce^{-A(t)} + \left(\int_\alpha^t b(s)e^{A(s)}\mathrm{d}s\right) e^{-A(t)},$$

où $C \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in I$. Si l'on n'impose aucune condition supplémentaire à y, il existe donc une infinité de solutions, paramétrées par la constante C.

Exercice 6. Déterminer les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $y' - \frac{y}{t} = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Solution : Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est $t \mapsto -\ln(t)$. Or $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{-(-\ln(t))} = e^{\ln(t)} = t$. Donc les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions de la forme $y_H \ : t \mapsto \lambda t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche maintenant une solution de $y' - \frac{y}{t} = t^2$ en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y : t \mapsto \lambda(t)t$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - \frac{y(t)}{t} = t^2 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t)t + \lambda(t) - \frac{\lambda(t)t}{t} = t^2 \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t) = t\end{aligned}$$

Une primitive est $t \mapsto \frac{t^2}{2}$, donc une solution de $y' - \frac{y}{t} = t^2$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $y_P : t \mapsto \frac{t^3}{2}$.
Les solutions à valeurs réelles de $y' - \frac{y}{t} = t^2$ sont donc les fonctions de la forme $y : t \mapsto \lambda t + \frac{t^3}{2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Attention : le résultat du cours porte sur un *intervalle* I, on n'aurait donc pas pu étendre ce raisonnement à $\mathbb{R}^*$.

Proposition 1.7 (Solution du problème de Cauchy)

Soit a et b deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'on fixe $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique fonction y dérivable sur I qui satisfait le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Démonstration. L'existence de la fonction y découle directement des résultats précédents, en ajustant les constantes pour coller à la condition initiale. On peut ainsi utiliser la fonction définie par :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = y_0 e^{A(t_0)-A(t)} + \left(\int_{t_0}^t b(s)e^{A(s)}\mathrm{d}s\right) e^{-A(t)}.$$

Montrons maintenant l'unicité. Soit y_1 et y_2 deux fonctions qui vérifient le problème de Cauchy. Alors, par principe de superposition, $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$, donc il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in I$, $(y_1 - y_2)(t) = Ce^{-A(t)}$. En particulier pour $t = t_0$, on trouve $y_0 - y_0 = Ce^{-A(t_0)}$, or $e^{-A(t_0)} \neq 0$ donc $C = 0$. Donc $y_1 = y_2$. $\square$

Exercice 7. Déterminer la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation $y' - \frac{y}{t} = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $y(1) = 0$.
Solution : Soit y une solution au problème de Cauchy. Puisque y est solution de $y' - \frac{y}{t} = t^2$, l'exercice 6 nous donne l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $y(t) = \lambda t + \frac{t^3}{2}$. Or $y(1) = 0$, donc $0 = \lambda + \frac{1}{2}$, donc $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Donc l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $y(t) = -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{2}$.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

2.1 Définition et structure linéaire

Définition 2.1 (Solution d'une l'équation différentielle d'ordre 2)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction y définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite **solution** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ si elle est deux fois dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t).$$

Remarque. En physique, on rencontre souvent l'équation $y''(t) + \frac{\omega_0}{Q} y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$, il s'agit également d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.

Définition 2.2 (Équation différentielle homogène associée)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **équation différentielle homogène associée** à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ l'équation dont le second membre est réduit à 0 :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Proposition 2.3 (Principe de superposition)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si y_1 est solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y'' + ay' + by = f_2(t)$, alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda y_1 + \mu y_2)$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$.

Démonstration. y_1 et y_2 sont deux fois dérivables sur I, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ l'est aussi par combinaison linéaire. De plus, $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned}(\lambda y_1 + \mu y_2)''(t) + a(\lambda y_1 + \mu y_2)'(t) + b(\lambda y_1 + \mu y_2)(t) &= \lambda y_1''(t) + \mu y_2''(t) + a\lambda y_1'(t) + a\mu y_2'(t) + b\lambda y_1(t) + b\mu y_2(t) \\ &= \lambda(y_1''(t) + ay_1'(t) + by_1(t)) + \mu(y_2''(t) + ay_2'(t) + by_2(t)) \\ &= \lambda f_1(t) + \mu f_2(t),\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. □

Remarque. Soit y_P une solution de $y'' + ay' + by = f(t)$. Pour toute solution y de $y'' + ay' + by = f(t)$, la fonction $y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t)$, c'est-à-dire solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$. On a peut donc écrire toute solution y de $y'' + ay' + by = f(t)$ sous la forme $y = y_H + y_P$, où y_P est une solution fixée et $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation homogène associée.

2.2 Résolution de l'équation homogène

Définition 2.4 (Équation caractéristique)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ l'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.5 (Solutions de $y'' + ay' + by = 0$ à valeurs complexes)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et (E) l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

- Si (E) a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
- Si (E) a une unique solution complexe r_0, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t}$.

Démonstration. Quitte à avoir $r_1 = r_2 = r_0$ (si $\Delta = 0$), on peut factoriser l'équation caractéristique sous la forme $r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2)$. Les relations coefficients-racines donnent alors $a = -(r_1 + r_2)$ et $b = r_1 r_2$.
Soit y une fonction deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose $\forall t \in I$, $z(t) = y(t)e^{-r_1 t}$. C'est une fonction deux fois dérivable sur I, et :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} y(t) = z(t)e^{r_1 t} \\ y'(t) = e^{r_1 t}\left(z'(t) + r_1 z(t)\right) \\ y''(t) = e^{r_1 t}\left(z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)\right) \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que y soit solution de $y'' + ay' + by = 0$ est alors :

$$\forall t \in I, \quad e^{r_1 t}\left(z''(t) + (\underbrace{2r_1 + a}_{r_1 - r_2})z'(t) + (\underbrace{r_1^2 + ar_1 + b}_{=0})z(t)\right) = 0 \iff \forall t \in I, \quad z''(t) + (r_1 - r_2)z'(t) = 0.$$

On reconnaît alors une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur z', qui s'étudie avec une disjonction de cas :

- Si $r_1 - r_2 \neq 0$ (le cas de deux solutions distinctes), y est solution si et seulement si :
$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \forall t \in I, \quad z'(t) = \lambda e^{-(r_1 - r_2)t},$$
ce qui équivaut en primitivant de nouveau à : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $z(t) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{-(r_1 - r_2)t} + \mu$. Comme $y(t) = z(t)e^{r_1 t}$, cette dernière forme équivaut à $\forall t \in I$, $y(t) = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t}$. En posant $C_1 = \mu$ et $C_2 = \frac{-\lambda}{r_1 - r_2}$, on obtient le résultat annoncé.
- Si $r_1 - r_2 = 0$ (le cas d'une unique solution), y est solution si et seulement si :
$$\exists C_2 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \forall t \in I, \quad z'(t) = C_2,$$
ce qui équivaut en primitivant de nouveau à : $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $z(t) = C_1 + C_2 t$. Comme $y(t) = z(t)e^{r_0 t}$, cette dernière forme équivaut à $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$, d'où le résultat annoncé.

□

Exercice 8. Déterminer les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. On trouve comme discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 \neq 0$. Elle admet donc deux solutions, $\frac{4-2}{2} = 1$ et $\frac{4+2}{2} = 3$.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme $y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Proposition 2.6 (Solutions de $y'' + ay' + by = 0$ à valeurs réelles)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et (E) l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

- Si (E) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
- Si (E) a une unique solution réelle r_0, une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$.
- Si (E) a deux solutions complexes conjuguées $r \pm i\omega$ ($r \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$), une fonction y est solution de $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in I$, $y(t) = (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))\, e^{rt}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que les solutions réelles de $y'' + ay' + by = 0$ sont les parties réelles des solutions complexes de $y'' + ay' + by = 0$:

- Si y est une fonction complexe solution de $y'' + ay' + by = 0$, alors sa partie réelle est dérivable deux fois sur I, et on trouve en prenant la partie réelle dans l'égalité $y'' + ay' + by = 0$ (puisque a et b sont réels) :

$$\mathrm{Re}(y)'' + a\,\mathrm{Re}(y)' + b\,\mathrm{Re}(y) = 0.$$

  Cela signifie que la fonction $\mathrm{Re}(y)$ est une solution (réelle, donc) de $y'' + ay' + by = 0$.

- Réciproquement, toute fonction réelle solution de $y'' + ay' + by = 0$ peut être vue comme la partie réelle d'une solution complexe de $y'' + ay' + by = 0$ (elle-même).

On en déduit :

- Si $\Delta > 0$ (r_1 et r_2 sont réelles), on cherche la partie réelle de $y : t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$. On trouve :

$$\forall t \in I, \quad \mathrm{Re}(y(t)) = \mathrm{Re}(C_1 e^{r_1 t}) + \mathrm{Re}(C_2 e^{r_2 t}) = \mathrm{Re}(C_1) e^{r_1 t} + \mathrm{Re}(C_2) e^{r_2 t}.$$

  En posant $R_1 = \mathrm{Re}(C_1)$ et $R_2 = \mathrm{Re}(C_2)$, on obtient bien la forme annoncée par le théorème (à un changement de notations près).

- Si $\Delta = 0$ (r_0 est racine double réelle), on raisonne de même.

- Si $\Delta < 0$ (racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$), on cherche la partie réelle de $y \ : \ t \mapsto C_1 e^{(r+i\omega)t} + C_2 e^{(r-i\omega)t}$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$. On remarque que :

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \quad y(t) &= e^{rt}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)\\ &= e^{rt}\Big(C_1(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + C_2(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))\Big)\\ &= e^{rt}\Big((C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega t)\Big)\end{aligned}$$

  Donc :

$$\forall t \in I, \quad \mathrm{Re}(y(t)) = e^{rt}\Big(\mathrm{Re}(C_1 + C_2)\cos(\omega t) + \mathrm{Re}(i(C_1 - C_2))\sin(\omega t)\Big).$$

  En posant $R_1 = \mathrm{Re}(C_1 + C_2)$ et $R_2 = \mathrm{Re}(i(C_1 - C_2))$, on obtient bien la forme annoncée par le théorème (à un changement de notations près).

□

Exercice 9. Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées, i et $-i$ (inutile de calculer le discriminant ici…). Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme $y : t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2.3 Recherche d'une solution particulière

Quelques astuces permettent de deviner la forme d'une solution de $y'' + ay' + by = f(t)$:

- Si f est une constante et $b \neq 0$, on cherche une solution y_P constante.
- Si f est polynomiale, on cherche une solution y_P polynomiale (le plus souvent de même degré).
- Si $f(t) = e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, on regarde l'équation caractéristique :
  - si α n'est pas racine, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
  - si α est racine simple, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda t e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
  - si α est racine double, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Si les coefficients a et b sont réels et $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, on cherche une solution de la forme $y_P(t) = \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

  On peut aussi trouver une solution complexe de $y'' + ay' + by = e^{i\omega t}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\omega t)$).

Exercice 10. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = t^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $y\ : t \mapsto a + bt + ct^2$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = b + 2ct$, $y''(t) = 2c$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^2 + 5 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2c - 3(b + 2ct) + 2(a + bt + ct^2) = t^2 + 5 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2ct^2 + (2b - 6c)t + 2c - 3b + 2a = t^2 + 5 \\
&\Longleftarrow \begin{cases} 2c = 1 \\ 2b - 6c = 0 \\ 2c - 3b + 2a = 5 \end{cases} \\
&\Longleftarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ a = \frac{17}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution de $y'' - 3y' + 2y = t^2 + 5$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{17}{4} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2$.

Exercice 11. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont 3 est solution. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose donc $y : t \mapsto \lambda t e^{3t}$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = \lambda e^{3t} + \lambda t 3e^{3t} = \lambda e^{3t}(1 + 3t)$, $y''(t) = \lambda 3e^{3t}(1 + 3t) + \lambda e^{3t}3 = 3\lambda e^{3t}(3t + 2)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = e^{3t} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 3\lambda e^{3t}(3t + 2) - 4\lambda e^{3t}(1 + 3t) + 3\lambda t e^{3t} = e^{3t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{3t}\,(9t + 6 - 4 - 12t + 3t) = e^{3t} \\
&\iff 2\lambda = 1 \\
&\iff \lambda = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Une solution de $y'' - 4y' + 3y = e^{3t}$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{t}{2}e^{3t}$.

Exercice 12. Déterminer une solution à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = \sin(2t)$ sur $\mathbb{R}$.
Solution : Son équation caractéristique est toujours $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont $2i$ n'est pas solution. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $y : t \mapsto \lambda e^{2it}$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 2i\lambda e^{2it}$, $y''(t) = -4\lambda e^{2it}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = e^{2it} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad -4\lambda e^{2it} - 8i\lambda e^{2it} + 3\lambda e^{2it} = e^{2it} \\
&\iff -4\lambda - 8i\lambda + 3\lambda = 1 \\
&\iff \lambda = -\tfrac{1}{1+8i} \\
&\iff \lambda = \tfrac{-1+8i}{65}
\end{aligned}$$

Une solution de $y'' - 4y' + 3y = \sin(2t)$ est donc la fonction définie par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{-1+8i}{65}e^{2it}\right) = \frac{8\cos(2t) - \sin(2t)}{65}$.

2.4 Résolution de l'équation complète

Proposition 2.7 (Solution générale de $y'' + ay' + by = f(t)$)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = f(t)$ sont les fonctions de la forme $y = y_H + y_P$, où y_H est une solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ et y_P est une solution particulière de $y'' + ay' + by = f(t)$.

Démonstration. On a montré en remarque plus tôt dans le chapitre que toute solution y de $y'' + ay' + by = f(t)$ peut s'écrire sous la forme $y = y_H + y_P$. Réciproquement, le principe de superposition nous donne que $y_H + y_P$ est solution de $y'' + ay' + by = f(t)$, d'où le résultat. □

Proposition 2.8 (Solution du problème de Cauchy)

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $t_0 \in I$. Pour tout couple $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique fonction y deux fois dérivable sur I qui satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

Démonstration. Admis. □

Remarque. Interprétation physique : en mécanique du point, l'équation du mouvement ne suffit pas à déterminer la trajectoire de l'objet. Typiquement, on la détermine en utilisant la position initiale (y_0) et la vitesse initiale (y_0').

Exercice 13. Déterminer l'unique fonction à valeurs réelles solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

<u>Solution :</u> D'après l'exercice 8, les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
D'après l'exercice 12, une solution est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{8\cos(2t) - \sin(2t)}{65}$.
Soit y l'unique solution du problème de Cauchy. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} + \frac{8\cos(2t) - \sin(2t)}{65}$. On a alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = \lambda e^t + 3\mu e^{3t} + \frac{-16\sin(2t) - 2\cos(2t)}{65}$.
Puisque $y(0) = 0$, on obtient $0 = \lambda + \mu + \frac{8}{65}$. Puisque $y'(0) = 0$, on obtient $0 = \lambda + 3\mu - \frac{2}{65}$.
On en déduit que $\mu = \frac{5}{65} = \frac{1}{13}$ et $\lambda = -\frac{13}{65} = -\frac{1}{5}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -\frac{1}{5}e^t + \frac{1}{13}e^{3t} + \frac{8\cos(2t) - \sin(2t)}{65}$.