Dérivabilité

Cours de É. Bouchet – PCSI

27 novembre 2025

Table des matières

Dans tout le chapitre, les fonctions f considérées sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Elle sont toutes supposées à valeurs réelles (sauf dans la dernière section).

1 Dérivabilité

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1.1 (Fonction dérivable en un point, nombre dérivé, rappel)

Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a lorsque $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée **nombre dérivé** de f en a.

Remarque. Cette définition équivaut à dire que f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Remarque. Dans le cas d'une fonction physique, la dérivée au point a correspond à la vitesse instantanée.

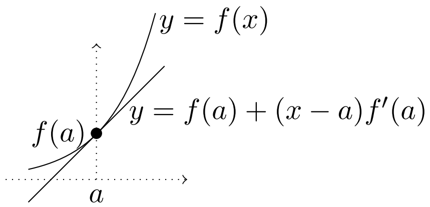
Proposition 1.2 (Dérivabilité et approximation locale)

Soit $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe $v \in \mathbb{R}$ et une fonction ε tels que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et qu'au voisinage de 0, $f(a+h) = f(a) + v.h + h.\varepsilon(h)$. Le réel v est alors unique et vaut $f'(a)$.

Proposition 1.3 (Tangente à la courbe, rappel)

Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point de coordonnées $(a, f(a))$ une tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Remarque. Interprétation géométrique :



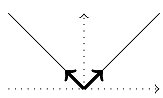
Définition 1.4 (Dérivée à droite ou à gauche en un point)

Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable à droite** (respectivement **dérivable à gauche**) en a lorsque $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$) existe et est finie. On note alors cette limite $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Proposition 1.5 (Demi-tangente à la courbe)

Soit $a \in I$. Si f est dérivable à gauche en a, $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente d'équation $y = f(a) + f'_g(a)(x-a)$, avec $x \leqslant a$.
Si f est dérivable à droite en a, $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente d'équation $y = f(a) + f'_d(a)(x-a)$, avec $x \geqslant a$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto |x|$. Elle est :
— dérivable à droite en 0, $f'_d(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$.
— dérivable à gauche en 0, $f'_g(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$.



Proposition 1.6 (Lien entre dérivabilité, dérivabilité à droite et dérivabilité à gauche)

Soit $a \in I$. Si f est dérivable à droite et à gauche en a et si $f'_d(a) = f'_g(a) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

1.2 Dérivabilité et continuité

Proposition 1.7 (Continuité d'une fonction dérivable)

Toute fonction f dérivable en un point a est continue en a.

Remarque. Attention : La réciproque est FAUSSE, la continuité n'implique pas la dérivabilité.

Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$, est continue, mais pas dérivable en 0.

1.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 1.8 (Dérivée sur un intervalle, fonction dérivée)

On dit que la fonction f est **dérivable** sur I lorsque f est dérivable en tout point de I (sauf pour les bornes de I, pour lesquelles on se restreint à la dérivabilité à droite ou à gauche).
On définit alors la **fonction dérivée** de f notée f', définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque. ATTENTION : Une fonction peut être dérivable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ sans être dérivable sur $[a, c]$. L'étude locale de la dérivabilité en b est indispensable pour affirmer qu'elle est dérivable sur $[a, c]$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = x^2$ et $\forall x < 0,\ f(x) = 0$.
Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

1.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.9 (Linéarité)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et α un réel. Alors $\alpha u + v$ est dérivable sur I et $(\alpha u + v)' = \alpha u' + v'$.

Proposition 1.10 (Dérivée d'un produit et d'un quotient)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
Si de plus, la fonction v ne s'annule sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Proposition 1.11 (Dérivée d'une composée)

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur $f(I)$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Proposition 1.12 (Dérivée de la fonction réciproque)

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans $J = f(I)$. Soit $a \in I$. La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et lorsqu'elle est dérivable, $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}$.

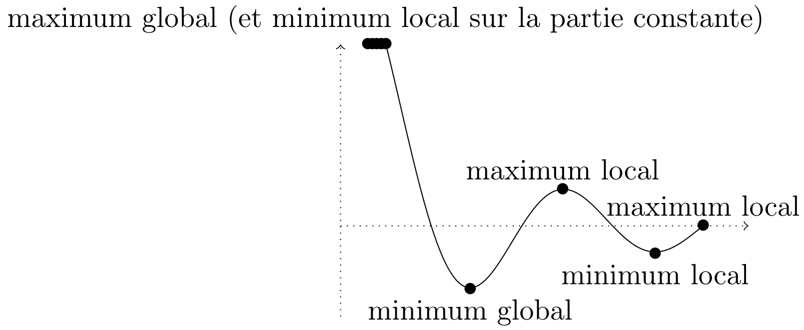
2 Principaux théorèmes

2.1 Caractérisation d'un extremum local

Définition 2.1 (Maximum/minimum local)

- On dit que f admet un **maximum local** en $a \in I$ lorsqu'au voisinage de a, $f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum local** en $a \in I$ lorsqu'au voisinage de a, $f(x) \geqslant f(a)$.

Exemple. Représentation graphique :



Définition 2.2 (Point critique)

Soit f une fonction dérivable sur I et $a \in I$. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Proposition 2.3 (Caractérisation d'un extremum par la dérivée)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$ qui n'est pas une borne de I. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque. ATTENTION : la réciproque est fausse ! Il se peut que $f'(a) = 0$ sans que f n'admette d'extremum en a. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais n'atteint ni un maximum ni un minimum en ce point.

Exercice 2. Sans utiliser de tableau de variations, trouver les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^4 + x$.

Remarque. Cette technique sera surtout utile dans les cas où le tableau de variations de la fonction est compliqué à obtenir. On verra plus tard d'autres stratégies d'étude locale.

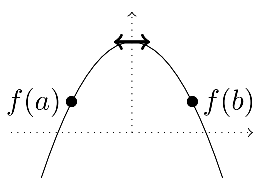
2.2 Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis

Proposition 2.4 (Théorème de Rolle)

Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque. Le réel c n'est pas forcément unique.

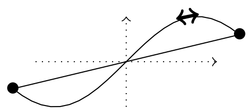
Remarque. Interprétation graphique : il existe donc un point de la courbe admettant une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



Proposition 2.5 (Égalité des Accroissements Finis)

Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur du segment $[AB]$, donc il existe un point de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à ce segment.



2.3 Inégalité des accroissements finis

Définition 2.6 (Fonction lipschitzienne)

Soit $M \geqslant 0$. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est M**-lipschitzienne** si $\forall (x,y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|\,.$$

Remarque. Cela signifie que pour tout $(x,y) \in I^2$, la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ (qui se lit sur l'axe des ordonnées) peut être majorée proportionnellement à la distance entre x et y (qui se lit sur l'axe des abscisses).

Remarque. C'est équivalent à dire que pour tous $x \neq y$, $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant M$. Autrement dit, une fonction est M-lipschitzienne si et seulement si ses accroissements sont bornés par M.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

Proposition 2.7 (Continuité d'une fonction lipschitzienne)

Soit $M \geqslant 0$. Si f est M-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.

Proposition 2.8 (Inégalité des Accroissements Finis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $|f'|$ est majorée par un réel K, alors f est K-lipschitzienne.

Exercice 4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - 1| \leqslant |x|$.

Proposition 2.9 (Application des accroissements finis aux suites récurrentes)

Soit u une suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose qu'il existe un intervalle J tel que :

- J est stable par f et contient au moins un terme de la suite.
- sur J, f admet un unique point fixe ℓ.
- sur J, f est k-lipschitzienne pour $k \in [0,1[$.

Alors u converge vers ℓ.

Remarque. L'un des gros intérêts de cette méthode est qu'elle montre au passage $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant k^{n-n_0}\,|u_{n_0} - \ell|$. Cela permet de déterminer la vitesse de convergence (au moins géométrique), ce qui donne des approximations numériques de la valeur de la limite.

Exercice 5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > -2$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$. Après avoir démontré que cette suite était bien définie, étudier son comportement en $+\infty$.

2.4 Caractérisation des fonctions constantes et monotones

Proposition 2.10 (Variations de fonctions dérivables)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :
- f est croissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur I si et seulement si : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Proposition 2.11 (Cas particulier de la stricte monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit J un ensemble obtenu en retirant un nombre fini de points à I. Si $\forall x \in J,\ f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) et $\forall x \in I \setminus J,\ f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Remarque. L'annulation en un nombre fini de points n'empêche donc pas la stricte croissance de la fonction.

2.5 Théorème de la limite de la dérivée

Proposition 2.12 (Limite de la dérivée)

Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Remarque. On montre au passage que la fonction f' est continue en a.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = x^2$ et $\forall x < 0,\ f(x) = 0$. Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$, cette fois-ci en utilisant le théorème de limite de la dérivée.

Remarque. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on peut adapter ce raisonnement pour montrer que f n'est pas dérivable en a. Son graphe admet alors une tangente verticale en ce point.

3 Dérivées successives

3.1 Définitions et rappels

Définition 3.1 (Classe C^1)

On dit que f est **de classe** C^1 sur I lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I. On note alors $f \in C^1(I, \mathbb{R})$.

Définition 3.2 (Fonction deux fois dérivable, classe C^2)

On dit que f est **deux fois dérivable** sur I lorsque f est de classe C^1 sur I et que f' est dérivable sur I. On note alors $(f')' = f^{(2)}$.
On dit que f est **de classe** C^2 sur I lorsque f est deux fois dérivable sur I et que $f^{(2)}$ est continue sur I. On note alors $f \in C^2(I, \mathbb{R})$.

Remarque. On peut ensuite définir récursivement toutes les dérivées suivantes : soit p un entier naturel non nul, si $f^{(p)}$ est dérivable sur I alors f est $(p+1)$ fois dérivable sur I, avec pour tout $x \in I$, $f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x)$. Si, de plus, $f^{(p+1)}$ est continue sur I alors f est de classe C^{p+1} sur I.

Définition 3.3 (Classe C^∞)

On dit que f est **de classe** C^∞ sur I lorsque f est indéfiniment dérivable, c'est à dire dérivable à tout ordre. On note alors $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarque. Si f est continue sur I, on notera par convention $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $f^{(0)} = f$.

3.2 Formulaire

La plupart des fonctions usuelles sont de classe C^∞ sur tout intervalle inclus dans leur domaine de dérivabilité. Les formules suivantes sont à connaître et se montrent par récurrence (n'hésitez pas à écrire explicitement la récurrence dans le cas où la formule ne vous paraît pas évidente).

$f(x)$	$D_{f'}$	$f^{(n)}(x)$	$f(x)$	$D_{f'}$	$f^{(n)}(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
x^p $(p \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
			$\dfrac{1}{a+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-a\}$	$\dfrac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha - i)\right) x^{\alpha-n}$	$\dfrac{1}{a-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	$\dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

3.3 Opérations sur les dérivées

Proposition 3.4 (Linéarité des dérivées successives)

Soit $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et soient f et g des fonctions de classe C^p sur l'intervalle I. Alors :
- $f + g$ est de classe C^p sur I et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.
- αf est de classe C^p sur I et $(\alpha f)^{(p)} = \alpha f^{(p)}$.

Remarque. Ce résultat reste vrai si on remplace « de classe C^p » par « p fois dérivable » ou « de classe C^∞ ».

Exercice 7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la dérivée k-ième sur $]1, +\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{x^3+3x+1}{x^2-1}$.

Proposition 3.5 (Formule de Leibniz : dérivées successives du produit)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g des fonctions de classe C^n sur l'intervalle I. Alors fg est de classe C^n sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Remarque. Attention à ne pas se laisser induire en erreur par la notation en exposant : cette formule porte sur des dérivées, pas sur des puissances !

Exercice 8. Étudier la dérivabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$, et calculer ses dérivées.

Proposition 3.6 (Formule de composition)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une application définie sur I et g une application définie sur J avec $f(I) \subset J$. Alors :
- Si f est dérivable n fois sur I et g est dérivable n fois sur J, alors $g \circ f$ est dérivable n fois sur I.
- Si f et g sont de classe C^n respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.
- Si f et g sont de classe C^∞ respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe C^∞ sur I.

Proposition 3.7 (Formule de réciproque)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une application bijective de I dans $J = f(I)$. Alors :
- Si f est dérivable n fois sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable n fois sur J.
- Si f est de classe C^n sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe C^n sur J.
- Si f est de classe C^∞ sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe C^∞ sur J.

Remarque. Attention à ne pas oublier l'hypothèse de non-annulation de la dérivée !

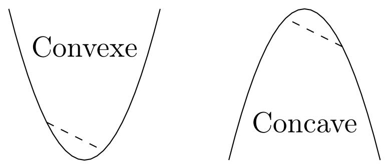
4 Fonctions convexes

4.1 Définition

Définition 4.1 (Fonction convexe, concave)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- f est **convexe** sur I lorsque $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.
- f est **concave** sur I lorsque $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Remarque. Interprétation géométrique : pour $t \in [0,1]$, $y = tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ parcourt le segment d'extrémités $f(x_1)$ et $f(x_2)$, tandis que $y = f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right)$ parcourt l'arc de courbe de f situé entre ces mêmes points. Donc la courbe représentative d'une fonction convexe (respectivement concave) est en dessous (respectivement au dessus) de ses cordes.



Exercice 9. On admet que le le logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\forall u \in [1, e]$, $u - 1 \leqslant (e-1)\ln(u)$.

Proposition 4.2 (Lien entre convexité et concavité)

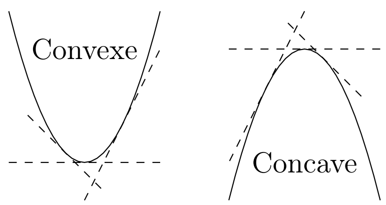
Une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si $-f$ est convexe sur I.

4.2 Convexité et dérivabilité

Proposition 4.3 (Convexité d'une fonction dérivable)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- f est convexe sur I,
- En tout point de I, la courbe de f est au dessus de ses tangentes,
- f' est croissante sur I.

Interprétation géométrique :



Exercice 10. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $x \geqslant \ln(x+1)$.

Proposition 4.4 (Convexité d'une fonction deux fois dérivable)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Remarque. De même, f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

5 Fonctions à valeurs complexes

Dans cette section, on considère une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 5.1 (Dérivabilité)

Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{C}$. On note alors $f'(a)$ la valeur de la limite.

Proposition 5.2 (Lien avec la dérivabilité des parties réelle et imaginaire)

Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a. On a alors :

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a).$$

Remarque. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $C^k(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{C}$ qui sont k fois dérivables et dont la dérivée k-ième est continue. La fonction dérivée k-ième de f est notée $f^{(k)}$, et par convention, $f^{(0)} = f$.

Remarque. Les formules usuelles de dérivée (combinaison linéaire, produit, formule de Leibniz) se généralisent sans difficulté au cas complexe. Ce n'est pas contre pas le cas des résultats évoquant une monotonie, des résultats de convexité, du théorème de Rolle ou de l'égalité des accroissements finis.

Exemple. La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue et dérivable sur $[0, 2\pi]$, vérifie $e^{i0} = 1 = e^{i2\pi}$, mais sa dérivée $t \mapsto ie^{it}$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$.

Proposition 5.3 (Inégalité des accroissements finis, cas complexe)

Soit f une fonction de classe C^1 sur I. On suppose qu'il existe un réel M tel que $\forall t \in I, |f'(t)| \leqslant M$. Alors $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|$.