Polynômes

Cours de É. Bouchet – PCSI

8 janvier 2026

Table des matières

Dans tout ce chapitre, on notera n un entier naturel et $\mathbb{K}$ l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les polynômes

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Polynôme, coefficients)

Un **polynôme** d'indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression pouvant s'écrire sous la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n,$$

(avec la convention $X^0 = 1$), où $n \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{K}$.
Les α_k s'appellent les **coefficients** du polynôme P. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque. En particulier :

- Si tous les coefficients de P sont nuls, P est le polynôme nul. On note $P(X) = 0$.
- Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = 0$, P est un polynôme constant.
- Deux polynômes sont égaux si tous leurs coefficients sont égaux.

Définition 1.2 (Somme de polynômes)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $n \geqslant m$. Alors :

$$(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{m} (\alpha_k + \beta_k) X^k + \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k X^k.$$

Remarque. Si $m \geqslant n$, il suffit d'intervertir les rôles.

Définition 1.3 (Produit de polynômes)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors :

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{m+n} (\alpha_0 \beta_k + \alpha_1 \beta_{k-1} + \ldots + \alpha_k \beta_0) X^k = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i} \right) X^k.$$

Remarque. Ce résultat permet aussi de multiplier un polynôme par un scalaire (cas particulier du polynôme constant) : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda \alpha_k X^k$.

Remarque. Ces règles de calcul permettent de conserver une bonne partie des formules valables sur $\mathbb{K}$, et en particulier la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. On pose $P(X) = 5X^2 + 3X + 2$, $Q(X) = X^2 + 1$. Calculer $(P+Q)(X)$ et $(PQ)(X)$.
Solution : $(P+Q)(X) = 6X^2 + 3X + 3 = 3(2X^2 + X + 1)$ et $(PQ)(X) = 5X^4 + 3X^3 + 7X^2 + 3X + 2$.

Exercice 2. Déterminer un réel a tel que $(X-2)(X-5) = X^2 + aX + 10$.
Solution : On obtient en développant $(X-2)(X-5) = X^2 - 2X - 5X + 10 = X^2 - 7X + 10$. Donc par identification des coefficients, poser $a = -7$ convient.

Définition 1.4 (Composition)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q(X)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors : $(P \circ Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (Q(X))^k$.

Exemple. Si $P(X) = 5X^2 + 3X + 2$, alors $P(X^2) = 5X^4 + 3X^2 + 2$.

1.2 Degré et coefficient dominant

Définition 1.5 (Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\alpha_n \neq 0$. L'entier n est appelé **degré** du polynôme P, et α_n est appelé **coefficient dominant** de P.
Un polynôme de coefficient dominant 1 est dit **unitaire**.
On note $\deg(P) = n$, et $\mathbb{K}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Remarque. Par convention le degré du polynôme nul est donné par : $\deg(0) = -\infty$. Cela signifie notamment que $\mathbb{K}_n[X]$ contient le polynôme nul.

Remarque. En particulier, $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$.

Exercice 3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer le degré de $P(X) = aX^2 + bX + c$.
Solution :

- Si $a \neq 0$, $\deg(P) = 2$.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\deg(P) = 1$.
- Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, $\deg(P) = 0$.
- Si $a = b = c = 0$, $\deg(P) = -\infty$.

Proposition 1.6 (Degré de la somme et du produit)

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$,

$$\deg(P + Q) \leqslant \max\left(\deg(P), \deg(Q)\right) \text{ avec égalité en particulier si } \deg(P) \neq \deg(Q),$$

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \text{ et en particulier } \forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \deg(\alpha P) = \deg(P).$$

Remarque. La formule de degré de la somme n'est pas une égalité dans le cas général. En effet, si $P(X) = 2X^2$ et $Q(X) = -2X^2 + 3X$, les termes en X^2 se simplifient et $\deg(P + Q) = 1 < 2$.

Démonstration. Si $P(X) = 0$ ou $Q(X) = 0$, les résultats sont immédiats. Sinon, il existe des coefficients $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(\beta_i) \in \mathbb{K}^{m+1}$, avec $\alpha_n \neq 0$ et $\beta_m \neq 0$, tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k X^k$.

- Cas de la somme : on peut supposer que $n \geqslant m$ (l'autre cas se traite en intervertissant les polynômes). Alors $(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{m} (\alpha_k + \beta_k) X^k + \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k X^k$. La plus grande puissance intervenant dans cette expression est n, donc $\deg(P + Q) \leqslant n = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

  Pour le cas d'égalité, il faut de plus que le coefficient du terme en X^n soit non nul. Dans le cas où $n \neq m$, ce coefficient vaut $\alpha_n \neq 0$, donc il y a bien égalité.

- Cas du produit : $(PQ)(X) = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} \beta_k X^k\right)$. Le terme de plus haut degré est $\alpha_n \beta_m X^{n+m}$. Or $\alpha_n \beta_m \neq 0$ par produit de réels non nuls, donc $\deg(PQ) = n + m = \deg(P) + \deg(Q)$.

□

Remarque. Le degré est très pratique pour manipuler les polynômes dont il n'est pas simple de déterminer les coefficients (par exemple quand ils sont sous forme factorisée parce que ça demanderait beaucoup de calculs).

Proposition 1.7 (Cas d'un produit nul)

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$, $(PQ)(X) = 0 \Longleftrightarrow P(X) = 0$ ou $Q(X) = 0$.

Démonstration. La réciproque est évidente, il suffit donc de vérifier le sens direct.
On suppose que que $(PQ)(X) = 0$. Par passage au degré, on obtient $\deg(P) + \deg(Q) = -\infty$. Si $P(X) \neq 0$ et $Q(X) \neq 0$, on aurait $\deg(P) + \deg(Q) \in \mathbb{N}$, ce qui est donc impossible. On en déduit que $P(X) = 0$ ou $Q(X) = 0$. □

Exercice 4. Pour quels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a-t-on $(\alpha X + \beta)(3X^2 + 6) = 0$?
Solution : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on trouve par propriétés du produit puis identification des coefficients :

$$(\alpha X + \beta)(3X^2 + 6) = 0 \Longleftrightarrow \alpha X + \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Donc les seuls (α, β) qui conviennent sont $(0, 0)$.

2 Division de polynômes

Définition 2.1 (Multiple, diviseur)

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul. On dit que le polynôme B est un **diviseur** du polynôme A, ou que le polynôme A est un **multiple** du polynôme B, lorsqu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $A(X) = B(X)Q(X)$.

Exemple. $X + 1$ et $X - 1$ sont des diviseurs de $X^2 - 1$.

Proposition 2.2 (Division euclidienne)

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $\mathbb{K}[X]$ qui vérifient $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.
On appelle Q le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Remarque. Autrement dit, B est un diviseur de A lorsque le reste de la division de A par B est le polynôme nul.

Exemple. La division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par X s'écrit $X^2 + X + 1 = X(X + 1) + 1$, le quotient est donc $X + 1$ et le reste 1 est de degré $0 < 1$.

Démonstration. On fait la preuve en deux temps :

- Preuve de l'existence. On pose $B(X) = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$, et $A_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. (On introduit l'indice n pour marquer la connaissance du degré, et on définit $A_{-\infty}$ comme le polynôme nul). On va montrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ la propriété suivante :

$$P(n) : \text{«}\exists (Q_n, R_n) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ tels que } A_n = Q_n B + R_n \text{ et } \deg(R_n) < \deg(B)\text{»}.$$

Initialisation : pour tout $n < \deg(B)$, (il existe au moins un tel n car B est non nul), $A_n = 0B + A_n$ et $Q_n = 0$ et $R_n = A_n$ satisfont les conditions du théorème. Donc $P(n)$ est vraie.
Soit $n \geqslant \deg(B) - 1$ un entier naturel fixé, on suppose que $P(k)$ est vraie pour tout $k \leqslant n$. Soit A_{n+1} un polynôme de degré $n+1$. On considère le polynôme

$$S_n(X) = A_{n+1}(X) - \frac{a_{n+1}}{b_p} B(X) X^{n+1-p}.$$

Ce polynôme est de degré inférieur ou égal à n par construction (le coefficient $\frac{a_{n+1}}{b_p}$ a été choisi pour que les termes en X^{n+1} s'annulent). Il existe donc, par hypothèse de récurrence, des polynômes Q et R tels que $S_n(X) = Q(X)B(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(B)$. On a alors :

$$\begin{aligned} A_{n+1}(X) &= \frac{a_{n+1}}{b_p} B(X) X^{n+1-p} + Q(X)B(X) + R(X) \\ &= \left(\frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} + Q(X) \right) B(X) + R(X). \end{aligned}$$

Choisir $Q_{n+1}(X) = \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} + Q(X)$ et $R_{n+1}(X) = R(X)$ montre alors $P(n+1)$.
Cela termine la preuve de l'existence.

- Preuve de l'unicité. Supposons que (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) soient deux couples convenant : $A = BQ_1 + R_1$ et $A = BQ_2 + R_2$, avec $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$. Donc $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$ par soustraction. Les propriétés du degré donnent alors :

$$\deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(R_2 - R_1) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B).$$

Donc $\deg(Q_1 - Q_2) < 0$. Or le degré est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Donc $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ et $Q_1 = Q_2$. Donc $R_1 = R_2$, ce qui termine la preuve de l'unicité.

$\square$

Exercice 5. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 3X^3 + 3X + 2$ par $X^2 + 1$.
Solution :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +3X^3 & & +3X & +2 & X^2+1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & & -X^2 & & & X^2+3X-1 \\ \cline{1-5}
 & 3X^3 & -X^2 & +3X & +2 & \\
 & -3X^3 & & -3X & & \\ \cline{2-5}
 & & -X^2 & & +2 & \\
 & & X^2 & & +1 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 3 &
\end{array}$$

Le quotient est donc $X^2 + 3X - 1$, et le reste 3 vérifie $\deg(3) = 0 < 2 = \deg(X^2 + 1)$.

Proposition 2.3 (Degré du quotient)

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$, et Q le quotient de la division euclidienne de A par B. Si $\deg(A) \geqslant \deg(B)$, alors $\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$.

Démonstration. Par théorème de division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $A = BQ + R$ et $\deg(B) > \deg(R)$.
Donc $BQ = A - R$ et par propriétés du degré $\deg(B) + \deg(Q) = \deg(BQ) = \deg(A - R) = \deg(A)$, où la dernière égalité découle de la condition $\deg(A) > \deg(R)$ (puisque $\deg(A) \geqslant \deg(B) > \deg(R)$). Ce qui termine la preuve. $\square$

3 Fonctions polynomiales et racines

3.1 Fonction polynomiale

Définition 3.1 (Fonction polynomiale)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **fonction polynomiale associée** à P la fonction p, définie de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ par : $\forall x \in \mathbb{K}$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$.

Remarque. x est un nombre réel ou complexe, mais X n'en est pas un, c'est une indéterminée. On dit qu'on **évalue** le polynôme $P(X)$ en x.

Remarque. Les formules de combinaison linéaire et produit de fonctions polynomiales sont compatibles avec celles sur les polynômes.

Remarque. Pour calculer la valeur en $q \in \mathbb{K}$ de $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k = \alpha_0 + \alpha_1 X + ... + \alpha_n X^n$, on utilise habituellement l'algorithme de Horner, consistant à calculer :

$$P(q) = \alpha_0 + q(\alpha_1 + q(\alpha_2 + ... + (\alpha_{n-2} + q(\alpha_{n-1} + q\alpha_n)))).$$

Cet algorithme nécessite beaucoup moins d'opérations que l'algorithme naïf qui calcule les puissances.

Exemple. Si $P(X) = 3X^2 + 5X + 3$, l'algorithme de Horner donne $P(q) = 3 + q(5 + 3q)$.

3.2 Racines

Définition 3.2 (Racine d'un polynôme)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{K}$. On dit que r est une **racine** (ou un zéro) du polynôme P si $P(r) = 0$.

Remarque. Le polynôme nul a donc une infinité de racines.

Proposition 3.3 (Racines et divisibilité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{K}$. Le scalaire r est racine du polynôme $P(X)$ si et seulement si $X - r$ divise $P(X)$.

Exemple. 1 est racine de $X^2 - 1$, et donc $X - 1$ divise $X^2 - 1$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{K}$ fixé, on effectue la division euclidienne de $P(X)$ par $X - r$: il existe deux uniques polynômes $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $P(X) = (X - r)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < 1$. R est un polynôme constant, il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $R(X) = \lambda$. En évaluant P en r, on trouve $P(r) = 0 + \lambda$. Donc :

$$P(X) = (X - r)Q(X) + P(r).$$

On peut alors raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} r \text{ est racine de } P &\iff P(r) = 0 \\ &\iff \text{le reste de la division euclidienne de } P(X) \text{ par } X - r \text{ est nul} \\ &\iff X - r \text{ divise } P(X) \end{aligned}$$

□

Remarque. Ce résultat se généralise aux fonctions polynomiales. On l'avait d'ailleurs déjà rencontré dans le chapitre sur les nombres complexes : si P est une fonction polynomiale à coefficients complexes admettant $a \in \mathbb{C}$ comme racine, alors on peut factoriser $P(z)$ par $z - a$.

Proposition 3.4 (Racines distinctes et divisibilité)

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et r_1, r_2, ..., r_m des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$. Le polynôme $(X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_m)$ divise $P(X)$ si et seulement si r_1, r_2, ..., r_m sont des racines de $P(X)$.

Démonstration. On suppose que $(X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_m)$ divise $P(X)$. Alors $\exists Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_m)Q(X)$. Donc $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $P(r_k)=0$, donc r_1, r_2, ..., r_m sont des racines de $P(X)$.
Réciproquement, on suppose que r_1, r_2, ..., r_m sont des racines deux à deux distinctes de P, et on pose $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $H(k)$: « $(X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_k)$ divise $P(X)$ ».
L'initialisation est directe par la propriété précédente : $H(1)$ est vraie.
Soit $k \in [\![1,m-1]\!]$ un entier naturel fixé, on suppose que $H(k)$ est vraie : il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = (X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_k)A(X).$$

Comme $k+1 \leqslant m$, alors r_{k+1} est racine de P et $P(r_{k+1})=0$. Mais comme les r_i sont supposés distincts deux à deux $(r_{k+1}-r_1)(r_{k+1}-r_2)\dots(r_{k+1}-r_k) \neq 0$. Donc nécessairement $A(r_{k+1})=0$ et r_{k+1} est racine de A. Par la proposition précédente, il existe alors $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(X) = (X-r_{k+1})C(X)$. Donc

$$P(X) = (X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_k)(X-r_{k+1})C(X).$$

Ce qui montre $H(k+1)$.
Donc $\forall k \in [\![1,m]\!]$, $H(k)$ est vraie. En particulier $H(m)$ est vraie, ce qui termine la preuve. □

Proposition 3.5 (Degré et nombre de racines distinctes)

Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui possède $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si P admet r_1, r_2, ..., r_{n+1} comme racines distinctes, le résultat précédent donne l'existence d'un polynôme Q tel que :

$$P(X) = (X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_{n+1})Q(X).$$

Par propriétés du degré, cela donne $\deg(P) = n+1+\deg(Q)$. Comme par hypothèse, $\deg(P) \leqslant n$, cela implique que $\deg(Q) \leqslant -1$, donc $Q=0$, et donc $P=0$. □

Remarque. Par contraposée, tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines distinctes.

Remarque. En particulier, tout polynôme qui admet une infinité de racines distinctes est le polynôme nul, résultat qui nous sera très utile dans les exercices.

Remarque. On a vu plus tôt dans le chapitre qu'il était possible d'évaluer une égalité de polynômes en un point $x \in \mathbb{K}$ pour obtenir une égalité dans $\mathbb{K}$. Ce résultat permet au contraire de « désévaluer » des relations dans $\mathbb{K}$ pour se ramener à des relations en X.

Exercice 6. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\forall x \in [-1,1]$, $ax^2+bx+c=0$. Montrer qu'alors $a=b=c=0$.
Solution : On pose $P(X) = aX^2+bX+c$. Alors $\forall x \in [-1,1]$, $P(x) = 0$. Tous les réels de $[-1,1]$ sont donc racines du polynôme P, ce polynôme possède donc une infinité de racines distinctes. Donc $P(X)=0$. Donc par identification des coefficients, $a=b=c=0$.

Proposition 3.6 (Fonction polynomiale et retour au polynôme)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$, alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$.

Démonstration. On pose $Q(X) = P(X) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$. Alors $\forall x \in \mathbb{K}$, évaluer en x donne $Q(x) = P(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = 0$. Q admet donc une infinité de racines distinctes (tous les éléments de $\mathbb{K}$), donc $Q(X) = 0$, donc $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$. □

Remarque. Autrement dit, si on connaît une fonction polynomiale, on peut retrouver le polynôme associé.

3.3 Multiplicité d'une racine

Définition 3.7 (Ordre de multiplicité)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{K}$. On dit que r est une racine d'**ordre de multiplicité** p du polynôme P lorsque $(X-r)^p$ divise $P(X)$ et $(X-r)^{p+1}$ ne divise pas $P(X)$.

Remarque. Autrement dit, r est une racine d'ordre de multiplicité p du polynôme P lorsqu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-r)^p Q(X)$ et $Q(r) \neq 0$.

Remarque. Attention ! Pour montrer que r est une racine d'ordre p de P, il faut penser à vérifier la deuxième condition : que $(X-r)^{p+1}$ ne divise pas P.

Exemple. 1 est une racine double du polynôme $(X-1)^2(X-2)$.

Proposition 3.8 (Ordres de multiplicité et divisibilité)

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, $(n_1, \ldots, n_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ et r_1, ..., r_m des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$. Le polynôme $(X-r_1)^{n_1}(X-r_2)^{n_2} \ldots (X-r_m)^{n_m}$ divise $P(X)$ si et seulement si r_1, ..., r_m sont des racines de P de multiplicités respectives au moins n_1, ..., n_m.

Proposition 3.9 (Nombre maximum de racines avec multiplicité)

Un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ non nul admet au plus n racines, comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Démonstration. Ces deux résultats se démontrent en adaptant directement les démonstrations effectuées dans le cas des racines simples. □

3.4 Polynômes scindés

Définition 3.10 (Polynôme scindé)

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il n'est pas constant et peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$.

Proposition 3.11 (Somme et produit des racines d'un polynôme scindé)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ un polynôme de degré n, scindé et unitaire. Alors :

- le coefficient en X^{n-1} de $P(X)$ vaut $-s$, où $s = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$,
- le coefficient constant de $P(X)$ vaut $(-1)^n p$, où $p = \alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Autrement dit,

$$P(X) = X^n - sX^{n-1} + \ldots + (-1)^n p.$$

Démonstration. Il suffit de développer l'expression factorisée et d'identifier les coefficients pour s'en convaincre. □

Remarque. s correspond à la somme des racines de P (comptées avec multiplicité), p à leur produit.

Remarque. Dans le cas d'un polynôme non-unitaire, il suffit d'écrire $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$, où $\lambda \neq 0$ désigne son coefficient dominant, et on trouve $P(X) = \lambda\left(X^n - sX^{n-1} + ... + (-1)^n p\right)$.

Exemple. Dans le cas particulier d'un polynômes unitaire de degré 2, de racines α_1 et α_2, on a donc :

$$P(X) = X^2 - (\alpha_1+\alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2.$$

4 Dérivation de polynômes

4.1 Définition et calculs

Définition 4.1 (Polynôme dérivé)

Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **polynôme dérivé** de P le polynôme $P'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k X^{k-1}$.

Exemple. Si $P(X) = 4X^2 + 3X + 1$, alors $P'(X) = 8X + 3$.

Remarque. Le changement d'indice $j = k-1$ donne aussi $P'(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)\alpha_{j+1}X^j$.

Remarque. Cette définition coïncide avec la fonction dérivée d'une fonction polynomiale définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Attention, on n'a par contre pas de notion de dérivation pour une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$.

Remarque. Il n'y a pas de condition d'existence du polynôme dérivé, au contraire d'une fonction dérivée.

Remarque. Comme dans le cas des fonctions, on peut définir par récurrence des polynômes dérivés successifs : pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, si $P^{(j)}$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors $P^{(j+1)}$ est le polynôme dérivé de $P^{(j)}$, avec la convention $P^{(0)} = P$.

Proposition 4.2 (Opérations sur les polynômes dérivés)

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ et $(PQ)' = P'Q + Q'P$.

Démonstration. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k X^k$.

- On suppose que $n \geqslant m$. Alors $(\lambda P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{m}(\lambda\alpha_k + \beta_k)X^k + \sum_{k=m+1}^{n} \lambda\alpha_k X^k$, donc :

$$(\lambda P+Q)'(X) = \sum_{k=1}^{m} k(\lambda\alpha_k+\beta_k)X^{k-1} + \sum_{k=m+1}^{n} k\lambda\alpha_k X^{k-1} = \lambda\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{m} k\beta_k X^{k-1} = \lambda P'(X) + Q'(X).$$

- Pour le produit, $(PQ)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\beta_{k-i}\right)X^k$, donc $(PQ)'(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m+n-1}\left((j+1)\sum_{i=0}^{j+1}\alpha_i\beta_{j+1-i}\right)X^j$.
  Par ailleurs, $P'(X)Q(X) + Q'(X)P(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m+n-1}\left(\sum_{i=0}^{j}(i+1)\alpha_{i+1}\beta_{j-i} + \sum_{i=0}^{j}\alpha_i(j-i+1)\beta_{j-i+1}\right)X^j$.
  Pour montrer l'égalité des polynômes, il suffit de montrer l'égalité de leurs coefficients. Soit $j \in [\![0, m+n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{j}(i+1)\alpha_{i+1}\beta_{j-i} + \sum_{i=0}^{j}\alpha_i(j-i+1)\beta_{j-i+1} &= \sum_{k=1}^{j+1}k\alpha_k\beta_{j-k+1} + \sum_{i=0}^{j}\alpha_i(j-i+1)\beta_{j-i+1} \text{ en posant } k = i+1\\ &= \sum_{k=0}^{j+1}k\alpha_k\beta_{j-k+1} + \sum_{i=0}^{j+1}\alpha_i(j-i+1)\beta_{j-i+1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+1} \alpha_k \beta_{j-k+1} \left(k + (j-k+1)\right)$$
$$= (j+1) \sum_{k=0}^{j+1} \alpha_k \beta_{j-k+1}$$

□

Remarque. Ces formules permettent de montrer la formule de Leibniz : $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$. Sa preuve sera détaillée dans le prochain chapitre, pour dans le cas des dérivées de fonctions.

Proposition 4.3 (Degré du polynôme dérivé)

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg(P) \geqslant 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Sinon, $P'(X) = 0$ donc $\deg(P') = -\infty$.

Démonstration. On pose $n = \deg(P)$. Si $n \leqslant 0$, P est un polynôme constant, donc $P'(X) = 0$ et $\deg(P') = -\infty$. Sinon, on peut écrire $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $\alpha_n \neq 0$. En dérivant, $P'(X) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\alpha_{j+1} X^j$, et le coefficient du terme en X^{n-1} vaut $n\alpha_n \neq 0$. Donc $\deg(P') = n - 1$. □

Proposition 4.4 (Expression des polynômes dérivés successifs)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Alors,

$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P^{(k)}) = n - k$, et $P^{(k)}(X) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} \alpha_i X^{i-k}$ et $\forall k \geqslant n+1$, $P^{(k)}(X) = 0$.

Remarque. $\frac{i!}{(i-k)!} = (i-k+1) \times ... \times (i-1) \times i$, et ce produit contient $i - (i-k+1) + 1 = k$ termes.

Démonstration. On montre la première partie par récurrence : soit $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$H(k) : \text{ « } \deg(P^{(k)}) = n - k \text{ et } P^{(k)}(X) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} \alpha_i X^{i-k} \text{ ».}$$

$P^{(0)} = P$, il est donc de degré $n = n - 0$. De plus, $\sum_{i=0}^{n} \frac{i!}{(i-0)!} \alpha_i X^{i-0} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i = P(X)$. Donc $H(0)$ est vraie.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, on suppose que $H(k)$ est vraie. Alors, $\deg(P^{(k)}) = n - k \geqslant 1$ donc $\deg(P^{(k+1)}) = n - k - 1 = n - (k+1)$. De plus, $P^{(k)}(X) = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} \alpha_i X^{i-k}$, relation qu'on peut dériver (le terme constant se dérive en 0) :

$$P^{(k+1)}(X) = 0 + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} (i-k) \alpha_i X^{i-k-1} = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{i!}{(i-(k+1))!} \alpha_i X^{i-(k+1)}.$$

Donc $H(k+1)$ est vraie. On a donc montré que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $H(k)$ est vraie.
On en déduit en particulier que $P^{(n)}(X) = n!\alpha_n$ est un polynôme constant. Donc $\forall k \geqslant n+1$, $P^{(k)}(X) = 0$. □

4.2 Formule de Taylor et conséquences

Proposition 4.5 (Formule de Taylor)

Si P est un polynôme de degré n, alors $\forall a \in \mathbb{K}$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$.

Démonstration. On commence par le cas $a = 0$, pour lequel on déduit de la formule de dérivation que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P^{(k)}(0) = \frac{k!}{(0)!}\alpha_k 0^{k-k} = k!\alpha_k$. On a donc bien $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
Pour le cas général d'un a quelconque, on applique ce résultat au polynôme $Q(Y) = P(Y + a)$, d'indéterminée $Y = X - a$:

$$Q(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} Y^k.$$

Dériver k fois la relation $Q(Y) = P(Y+a)$ donne ensuite $Q^{(k)}(Y) = P^{(k)}(Y+a)$ et en particulier $Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(a)$. On obtient donc :

$$P(X) = Q(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} Y^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

□

Exemple. Soit $P(X) = X^2 + 3X + 5$. Alors $P'(X) = 2X + 3$, $P''(X) = 2$ et pour $a = 1$, on obtient :

$$P(X) = 9 + \frac{5}{1}(X-1) + \frac{2}{2}(X-1)^2 = 9 + 5(X-1) + (X-1)^2.$$

Proposition 4.6 (Multiplicité et dérivées successives)

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul, $r \in \mathbb{K}$ et p un entier naturel non nul. Le scalaire r est une racine d'ordre p du polynôme P si et seulement si $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $P^{(k)}(r) = 0$ et $P^{(p)}(r) \neq 0$.

Démonstration. Soit $n = \deg(P)$. On applique la formule de Taylor en r :

$$P(X) = P(r) + P'(r)(X-r) + \frac{P''(r)}{2!}(X-r)^2 + \cdots + \frac{P^{(p-1)}(r)}{(p-1)!}(X-r)^{p-1} + \frac{P^{(p)}(r)}{p!}(X-r)^p + \cdots + \frac{P^{(n)}(r)}{n!}(X-r)^n.$$

- On suppose que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $P^{(k)}(r) = 0$ et $P^{(p)}(r) \neq 0$. Alors

$$P(X) = (X-r)^p \underbrace{\left(\frac{P^{(p)}(r)}{p!} + \frac{P^{(p+1)}(r)}{(p+1)!}(X-r) + \cdots + \frac{P^{(n)}(r)}{n!}(X-r)^{n-p} \right)}_{Q(X)},$$

  donc $(X-r)^p$ divise $P(X)$. De plus, $Q(r) = \frac{P^{(p)}(r)}{p!} \neq 0$, donc $X - r$ ne divise pas $Q(X)$. Donc $(X-r)^{p+1}$ ne divise pas $P(X)$. Donc r est une racine d'ordre p de $P(X)$.

- On suppose maintenant que r est une racine d'ordre p de $P(X)$. Alors $(X-r)^p$ divise $P(X)$. Donc le reste $R(X)$ de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-r)^p$ est nul. Il faut donc déterminer ce reste. Par la formule de Taylor et l'unicité de la division euclidienne,

$$R(X) = P(r) + P'(r)(X-r) + \frac{P''(r)}{2!}(X-r)^2 + \cdots + \frac{P^{(p-1)}(r)}{(p-1)!}(X-r)^{p-1},$$

  (qui est bien de degré strictement inférieur à $p = \deg((X-r)^p)$). Donc

$$P(r) + P'(r)(X-r) + \frac{P''(r)}{2!}(X-r)^2 + \cdots + \frac{P^{(p-1)}(r)}{(p-1)!}(X-r)^{p-1} = 0,$$

  ce qui donne en composant à droite par $X + r$, $P(r) + P'(r)X + \frac{P''(r)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{P^{(p-1)}(r)}{(p-1)!}X^{p-1} = 0$, et donc par identification des coefficients, $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $P^{(k)}(r) = 0$.
  Il ne reste plus qu'à montrer que $P^{(p)}(r) \neq 0$. On le montre par l'absurde : supposons $P^{(p)}(r) = 0$. Les calculs précédents nous donnent qu'alors $(X-r)^{p+1}$ divise P, et donc r est une racine d'ordre au moins $p + 1$: absurde. Donc $P^{(p)}(r) \neq 0$.

$\square$

Exercice 7. Soit $P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 2$. Montrer que 1 est racine et déterminer son ordre de multiplicité.
Solution : $P(1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 2 = 0$, donc 1 est racine.
$P'(X) = 4X^3 - 6X^2 + 6X - 4$, donc $P'(1) = 4 - 6 + 6 - 4 = 0$, donc 1 est racine d'ordre au moins 2.
$P''(X) = 12X^2 - 12X + 6$, donc $P''(1) = 12 - 12 + 6 = 6 \neq 0$, donc 1 est racine d'ordre 2 de P.
Rmq : si on avait continué le calcul, $P^{(3)}(X) = 24X - 12$ et $P^{(4)}(X) = 24$ donc $P^{(5)}(X) = 0$. Mais ce n'est pas pour autant que 1 est d'ordre de multiplicité 5.

Proposition 4.7 (Ordre de multiplicité et racines des dérivées)

Soit r est une racine d'ordre $p \geqslant 1$ du polynôme P, alors :

- r est une racine d'ordre $p - 1$ de P',
- pour tout $j \in [\![0, p-1]\!]$, r est une racine d'ordre $p - j$ de $P^{(j)}$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du résultat précédent. $\square$

5 Polynômes irréductibles et factorisation

5.1 Factorisations dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition 5.1 (Théorème de d'Alembert-Gauss)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant (donc de degré supérieur ou égal à un) admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Admis. $\square$

Remarque. Les seuls polynômes irréductibles (polynômes P non constants et dont les seuls diviseurs sont les λ et les λP pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$) de $\mathbb{C}[X]$ sont donc les polynômes de degré 1.

Proposition 5.2 (Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$)

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et de coefficient dominant α_n peut s'écrire $P(X) = \alpha_n \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X - r_k)^{p_k}$, avec $r_k \in \mathbb{C}$ des racines distinctes de P, $p_k \in \mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité, et $\sum_{k=1}^{m} p_k = n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $H(n)$: « Si $\deg(P) = n$, $P(X) = \alpha_n \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X - r_k)^{p_k}$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_k = n$ ».

- Soit $P(X)$ un polynôme de degré 0. Alors $\exists a \in \mathbb{C}$ tel que $P(X) = a$. Donc $H(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $H(n)$ est vrai. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet une racine r, et est donc divisible par $(X-r)$: on peut écrire $P(X) = (X-r)Q(X)$, avec $\deg(Q) = n$. Il suffit d'appliquer $H(n)$ à Q et d'observer que P et Q ont le même coefficient dominant pour conclure que $H(n+1)$ est vrai.

Cela termine la preuve. $\square$

Remarque. Autrement dit, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Exercice 8. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 + X$.
Solution : Une factorisation directe donne $P(X) = X(X^2 + 1) = X(X - i)(X + i)$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $2X^n - 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution : Les racines de ce polynôme sont les racines n-ièmes de l'unité, donc $2X^n - 2 = 2\prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

5.2 Factorisations dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 5.3 (Racines conjuguées)

Soit z un nombre complexe, et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Si z est racine du polynôme P, alors $\overline{z}$ est également racine de P, avec le même ordre de multiplicité.

Démonstration. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ avec $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Comme z est racine de P, $0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$. Par passage au conjugué, comme $\alpha_k = \overline{\alpha_k}$ (puisque P est à coefficients réels) on obtient :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha_k} \cdot \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \overline{z}^k = P(\overline{z}).$$

Donc $\overline{z}$ est également racine de P. Pour conclure en ce qui concerne l'ordre de multiplicité, il suffit de refaire la même opération sur les dérivées de P, qui sont également des polynômes à coefficients réels. □

Proposition 5.4 (Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$)

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme produit d'un réel, de polynômes à coefficients réels de degré 1 et de polynômes à coefficients réels de degré 2 n'ayant pas de racine réelle.

Démonstration. On utilise la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = \alpha_n \prod_{k=1}^{n}(X - r_k)$, où les r_k sont des racines réelles ou complexes de P. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Si les r_k sont tous réels, la décomposition est encore valable dans $\mathbb{R}[X]$. Il reste donc à traiter le cas où l'on rencontre $r_{k_0} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dans ce cas, par la proposition précédente, $\overline{r_{k_0}}$ est également racine de P, avec le même ordre de multiplicité j. On simplifie alors tous les termes contenant ces deux racines :

$$(X - r_{k_0})^j (X - \overline{r_{k_0}})^j = \left((X - r_{k_0})(X - \overline{r_{k_0}})\right)^j = \left(X^2 - X(r_{k_0} + \overline{r_{k_0}}) + r_{k_0}\overline{r_{k_0}}\right)^j = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(r_{k_0})X + \left|r_{k_0}\right|^2\right)^j,$$

qui est bien dans $\mathbb{R}[X]$ et sans racine réelle. On procède de même pour toutes les racines complexes, ce qui permet de conclure. □

Remarque. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont donc :

- les polynômes de degré 1 ;
- les polynômes de degré 2 et de discriminant strictement négatif.

Exercice 10. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 + X$.
Solution : On a $P(X) = X(X^2 + 1)$. Or $X^2 + 1$ a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$, donc $X^2 + 1$ n'a donc pas de racine réelle et la factorisation est terminée.

6 Fractions rationnelles

Définition 6.1 (Fraction rationnelle)

On appelle **fraction rationnelle** tout quotient de type $\frac{P}{Q}$ où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $Q \neq 0$.

Proposition 6.2 (Décomposition en éléments simples)

Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$. Si Q est scindé de racines simples distinctes λ_1, ..., λ_r, alors il existe une unique décomposition de la forme :

$$R(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{X - \lambda_i},$$

avec $E(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Admis □

Remarque. Dans le cas où le polynôme au dénominateur aurait des racines multiples ou ne serait pas scindé, la forme cherchée pour la décomposition est plus complexe et sera fournie par l'exercice.

Exercice 11. Décomposer en éléments simples la fraction $R(X) = \dfrac{X^3 + 3X + 1}{X^2 - 1}$.

Solution : Comme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, on est bien dans le cas d'un dénominateur scindé à racines simples. Comme $\deg(X^3 + 3X + 1) \geqslant \deg(X^2 - 1)$, on commence par poser la division euclidienne associée :

$$X^3 + 3X + 1 = X(X^2 - 1) + 4X + 1, \text{ avec } \deg(4X + 1) = 1 < 2 = \deg(X^2 - 1).$$

Donc $R(X) = X + \frac{4X+1}{(X-1)(X+1)}$. Par décomposition des fractions rationnelles, il existe a et b deux réels tels que :

$$\frac{4X + 1}{(X - 1)(X + 1)} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1}.$$

Tout multiplier par $X - 1$ donne $\frac{4X+1}{X+1} = a + \frac{b(X-1)}{X+1}$, ce qui évalué en 1 donne à son tour $\frac{5}{2} = a + 0$, donc $a = \frac{5}{2}$. De même, tout multiplier par $X + 1$ donne $\frac{4X+1}{X-1} = \frac{a(X+1)}{X-1} + b$, ce qui évalué en -1 donne $\frac{-3}{-2} = 0 + b$ donc $b = \frac{3}{2}$. La décomposition cherchée est donc :

$$R(X) = X + \frac{5}{2(X - 1)} + \frac{3}{2(X + 1)}.$$

Remarque. Dans le cas de décompositions plus complexes, on peut aussi utiliser des limites en $\pm\infty$ ou l'évaluation en d'autres valeurs particulières pour déterminer les valeurs des constantes.

Exercice 12. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x^2 - 1}$ sur $]1, +\infty[$.

Solution : On a montré que $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) = x + \dfrac{5}{2(x - 1)} + \dfrac{3}{2(x + 1)} = x + \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x + 1}$, une primitive sur $]1, +\infty[$ est donc $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{2}\ln(|x - 1|) + \dfrac{3}{2}\ln(|x + 1|)$.